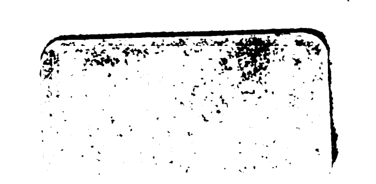

548 .S682
C.1
Der Ursprung der Gewit
Stanford University Libraries
3 6105 046 511 460









ENTWICKELUNG

EINER

THEORIE DER KRYSTALLSTRUKTUR

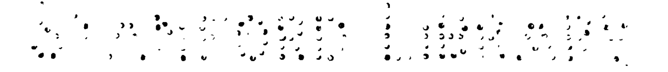
VON

Dr. LEONHARD SOHNCKE,

ORD. PROFESSOR DER PHYSIK AM POLYTECHNIKUM ZU KARLSRUHE.



MIT 55 HOLZSCHNITTEN IM TEXT UND 5 LITHOGR. TAFELN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1879.

Vorwort.

Während sich die Physik in den letzten Jahrzehnten vorzugsweise mit dem Studium der in gasförmigem Zustande befindlichen Körper beschäftigte, scheint sich das Interesse jetzt allmählich wieder mehr dem Verhalten der festen Körper zuzuwenden, wie aus der wachsenden Zahl derartiger Untersuchungen (z. B. über elastische Nachwirkung, über Elasticität krystallisirter Körper, u. A.) hervorgeht. Dadurch muss auch die Frage nach dem Wesen der Krystalle nothwendig wieder mehr in den Vordergrund treten, eine Frage, deren Studium mich seit vielen Jahren unausgesetzt beschäftigt hat, und zu deren Beantwortung die vorliegende Schrift einen Beitrag zu liefern bestimmt ist. Man findet hier die ganze Mannichfaltigkeit der überhaupt möglichen Krystallstrukturformen aus einem einzigen Princip, nämlich aus dem selbstverständlichen Grundsatze von der regelmässigen Anordnung, auf streng mathematischem Wege abgeleitet. Die geometrischen Resultate dieser Untersuchung sind von mir schon vor 3 Jahren in einer eignen Brochüre veröffentlicht worden („Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur. Karlsruhe 1876"), gegenwärtig wird die ausführliche Ableitung gegeben; manche der damals für die einzelnen Strukturformen gewählten Namen sind jetzt durch passendere ersetzt, doch sind die früheren Namen unter dem Text immer noch angegeben.

Die mathematische Methode der Untersuchung rührt von Herrn Camille Jordan her; derselbe hat in einer umfangreichen Abhandlung eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung gelöst, welche die vorliegende krystallographische Aufgabe mit umschliesst. Weil es mir indessen früher ge-

lungen war, in jener Abhandlung ausser einigen kleineren Ungenauigkeiten eine grössere Lücke zu entdecken, so glaubte ich mich gegen irgend welche Irrthümer nicht anders sichern zu können als dadurch, dass ich die ganze Untersuchung, soweit sie auf Krystallographie Bezug hat, selbstständig von vorn anfing, natürlich mit Benutzung des bewährten Grundgedankens der Jordan'schen Methode. Trotz der principiellen Uebereinstimmung, welche dadurch meine Untersuchung im Allgemeinen mit der Jordan'schen Arbeit bekommen musste, zeigen sich doch auch erhebliche Abweichungen, die vorzugsweise darin bestehen, dass ich überall auf die geometrische Deutung der Resultate das Hauptgewicht lege, denn die Auffindung der Strukturformen war ja mein einziges Ziel.

Zum Verständniss der ganzen Schrift ist keine höhere Mathematik, vielmehr nur ein kleiner Theil der elementaren, erforderlich; dagegen werden an das räumliche Anschauungsvermögen gewisse unumgängliche Anforderungen gestellt. Weil die Schrift sich keineswegs ausschiesslich an Mathematiker, sondern wesentlich an Naturforscher (Physiker, Krystallographen, Mineralogen, Chemiker) wendet, so habe ich es für nöthig gehalten, die wenigen kinematischen Hülfssätze, die bei den folgenden Entwicklungen benutzt werden, mit Angabe der sehr einfachen Beweise, im § 4 zusammenzustellen. Ueberhaupt ist der, freilich schwer durchführbare, Versuch gemacht, die Darstellung so zu halten, dass sie Lesern von ganz verschiedener mathematischer Vorbildung genügt.

Zu möglichst leichtem Eindringen in den eigentlichen Kern der Schrift dürfte es sich vielleicht empfehlen, nach der Einleitung zunächst nur die Erklärungen und die durch den Druck hervorgehobenen Sätze des Abschnitt I, unter Weglassung der Beweise, zu lesen, den Abschnitt II nur zu durchfliegen und sobald als möglich zu der tabellarischen Uebersicht aller regelmässigen Punktsysteme (§ 27) vorzudringen, deren Verständniss — mit Hülfe der auf den Tafeln beigegebenen Figuren — das Hauptziel der Schrift sein muss. Nächst dieser Uebersicht aller Strukturformen wird für den Naturforscher wohl die historische Einleitung und der Abschnitt III von Interesse sein; in letzterem ist der Nachweis der allgemeinen Uebereinstimmung der Theorie mit den Erfahrungs-

thatsachen enthalten. In dieser Beziehung möchte ich besonders die Erklärung des optischen Drehvermögens von Krystallen (§ 41) hervorheben; ferner den Nachweis, dass die Hemimorphie nicht in der Anordnung der Krystallelemente, sondern unmittelbar in der Beschaffenheit des einzelnen Elements begründet ist (§ 34). Endlich verdient die gelegentlich aufgestellte Eintheilung aller physikalischen Eigenschaften der Krystalle in 2 Gruppen (§ 37) vielleicht einige Beachtung.

Mineralogisch - krystallographische Detailangaben habe ich wesentlich aus den 3 Werken: Groth, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1876; Naumann-Zirkel, Elemente der Mineralogie. 1877; A. Knop, System der Anorganographie. Leipzig 1876, entnommen; ausserdem bin ich Herrn A. Knop für mancherlei werthvolle mündliche Mittheilungen zu Danke verpflichtet. Bezüglich der physikalischen Eigenschaften bin ich überall auf die Originalabhandlungen zurückgegangen.

Karlsruhe, März 1879.

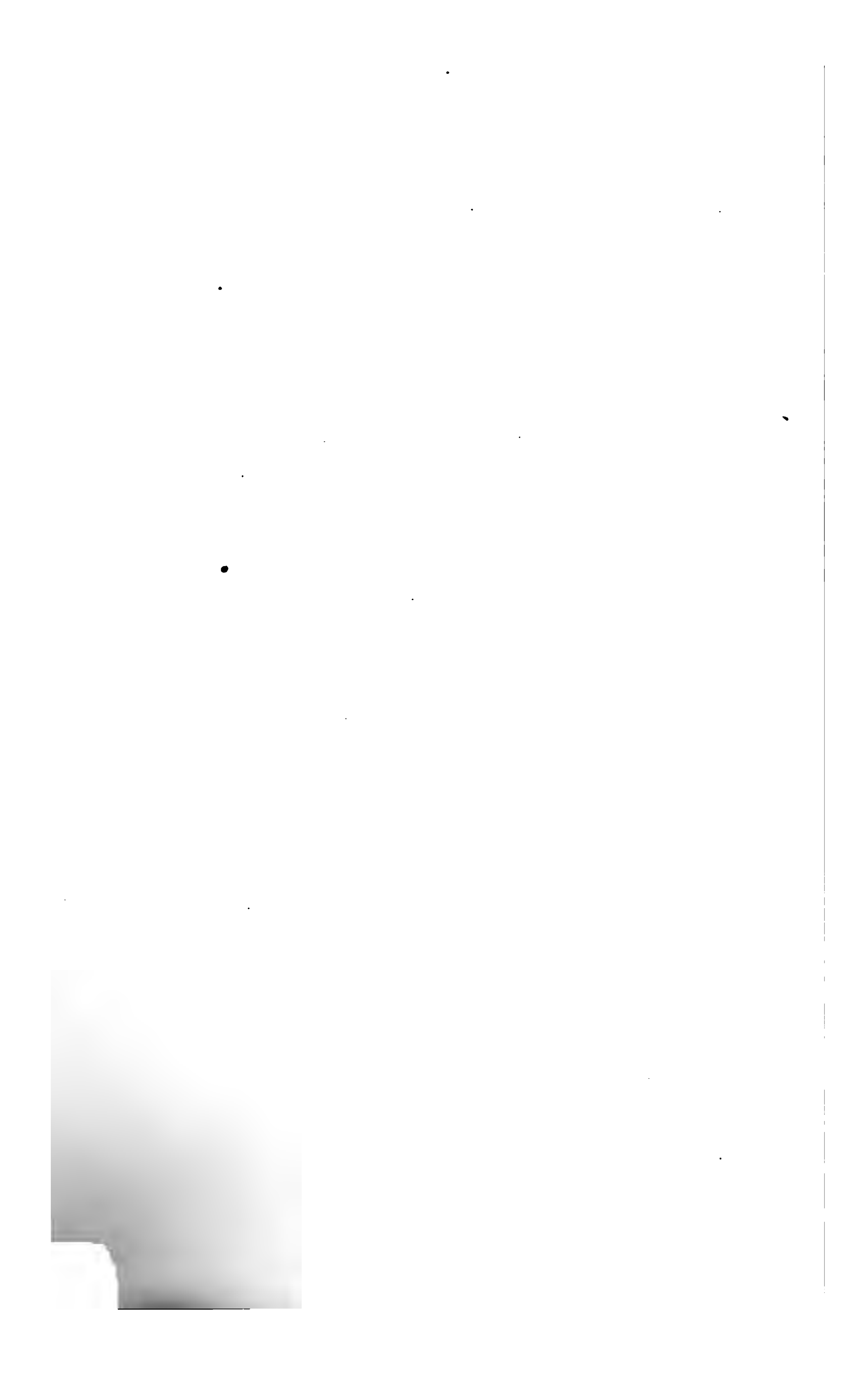
Der Verfasser.

Angabe der Stellen, wo folgende theils neue, theils nicht allgemein bekannte Benennungen erklärt sind.

Inhalt.

Abschnitt I.

Vorbereitende Betrachtungen.



Capitel I.

Einleitung.

§ 1. Begriff der Krystallstruktur.

Die ebenflächige Begrenzung ist zwar das auffallendste, aber nicht das wesentlichste Merkmal der Krystalle, sondern nur eins neben anderen; denn nicht jeder beliebige ebenflächig begrenzte Körper ist ein Krystall; andererseits hört ein Krystall nicht auf, ein solcher zu sein, auch wenn seine ebenflächige Begrenzung zerstört ist. Charakteristisch für den krystallisirten Körper ist vielmehr dies, dass er nach verschiedenen in ihm gezogenen Richtungen im Allgemeinen ein verschiedenes Verhalten zeigt (jedoch kann dasselbe für einige unter allen Richtungen übereinstimmen). Vorzüglich Cohäsion und Elasticität, mit gewissen Einschränkungen aber auch Wärmeausdehnung, Wärmeleitung, Verwitterbarkeit, Durchstrahlbarkeit, Lichtbrechung, elektrisches und magnetisches Verhalten sind verschieden in den verschiedenen Richtungen; desgleichen ist auch die Anordnung der ebenen Grenzflächen nach den verschiedenen Richtungen hin eine verschiedene. Eine charakteristische Folge der mit der Richtung wechselnden Cohäsion ist sodann die den meisten Krystallen zukommende Eigenschaft, sich nach Ebenen von bestimmter Lage besonders leicht spalten zu lassen. — Der Krystall ist ferner ein homogener Körper; er besitzt keinen physisch ausgezeichneten Punkt, namentlich keinen Mittelpunkt. An welcher Stelle man auch aus dem Inneren eines Krystalls ein Stück herausnimmt: es zeigt immer dieselben,

nur von der Richtung abhängigen Eigenschaften. Hiernach hat man folgende Erklärung:

Ein Krystall ist ein homogener fester Körper, dessen geometrisches und physikalisches Gesammtverhalten nach den verschiedenen in ihm gezogenen Richtungen hin im Allgemeinen verschieden ist, und der bei ungestörter Ausbildung von ebenen Flächen begrenzt ist.

Die Ausdehnung der Grenzflächen ist regellos; fest bestimmt sind nur die Winkel, unter denen sie sich schneiden. Denkt man aber die physisch gleichwerthigen Flächen nicht verzerrt, sondern auch geometrisch gleichmässig ausgebildet, so zeigen sich die meisten dieser idealen Krystallgestalten mit Symmetrie begabt, nach deren höherem oder geringerem Grade sie in Gruppen (Krystallsysteme) zusammengefasst werden. Genaueres über die verschiedenen Arten von Symmetrie folgt später.

Indem ein Krystall durch äussere Anlagerung von Stofftheilchen wächst, so ist es nicht anders denkbar, als dass er sich in einer gewissen regelmässigen Weise aus denselben aufbaut. *Man versteht nun unter der Struktur eines Krystalls die Anordnung der ihn zusammensetzenden Theilchen.*

[Bei atomistischer Vorstellung bietet der Begriff der Struktur gar keine Schwierigkeit; er ist aber auch bei der Vorstellung kontinuirlicher Raumerfüllung unvermeidlich; die Volumelemente eines Krystalls sind eben nicht beliebig wählbar, sondern sie sind in bestimmter Weise begrenzt und angeordnet zu denken.]

Die Struktur ist die nächste Ursache des verschiedenen Verhaltens eines Krystalls nach den verschiedenen Richtungen hin; daher wird dies Verhalten dem Verständniss näher gerückt, sobald es gelingt, bestimmtere Vorstellungen über die Struktur zu gewinnen.

Natürlich kann die Forschung nicht bei der Erkenntniss der Struktur stehen bleiben, sondern sie muss die Frage nach dem tieferen Grunde der verschiedenen Strukturformen zu beantworten suchen. Wenn es nun auch keinem Zweifel unterliegt, dass die Struktur wesentlich durch die stoffliche, d. h. chemische Beschaffenheit bedingt ist und sich daher aus letzterer ableiten lassen muss, so scheint eine solche Ableitung doch für den gegenwärtigen Zustand unserer Kenntniss

noch ein Problem höherer Ordnung zu sein. Dasselbe wird, als ausserhalb des Rahmens dieser Schrift liegend, nicht weiter berührt werden.[1])

§ 2. Historische Einleitung.

Als man anfing sich mit der Theorie der Krystallstruktur zu beschäftigen, waren die Vorstellungen natürlich zunächst nur einzelnen speciellen Fällen angepasst. In dem Masse jedoch als die Kenntniss von den krystallisirten Körpern zunahm, wurden auch die theoretischen Vorstellungen von ihrer Struktur bestimmter und umfassender, so dass eine Geschichte dieser Theorien das Bild einer fast stetig fortschreitenden Entwickelung zu immer schärferer und konsequenterer Gestaltung hin darbietet, wie aus den folgenden historischen Andeutungen hervorgehen wird.[2])

Einer der ersten, die sich genauere Vorstellungen vom Bau der Krystalle zu bilden suchten, scheint Rob. Hooke[3])

---

1) Vereinzelte Versuche zur Ableitung der Krystallstruktur aus der chemischen Zusammensetzung sind indessen schon gemacht; so von

Delafosse (Mém. des savants étrangers. T. 13. Paris 1852: Mém. s. une rélation import. entre l. compos. atomique et l. forme cristalline);

G. Hinrichs (Atomechanik. Jowa-City 1867. 4°. 44 S.; ferner: Contributions to Molecular Science or Atomechanics. Jowa 1868);

Schrauf (Lehrb. d. physikal. Mineralog. Bd. II. Wien 1868. Cap. XI. p. 160);

Dana (Sillim. Amer. Journ. 1867. 2 ser. Vol. 44. pag. 89 und 252. „Crystallogenic and Crystallographic Contributions. No. IV: On a connection between Crystalline form and Chemical constitution, etc." auszüglich übersetzt in Erdmann u. Werther Journ. f. prakt. Chemie. 1868. Bd. 103. p. 385);

Gaudin (in verschiedenen Abhh., die zusammengefasst sind in: L'architecture du monde des atomes. Paris 1873);

endlich neuerdings von Spring (Hypothèses sur la cristallisation. Liège 1876). — Auch eine ältere Abhandlung von Ampère: S. l. déterm. des proport. dans lesqu. l. corps se combinent d'après l. nombre et l. dispos. resp. des moléc. etc. in den Ann. d. Chim. T. 90. 1814. p. 43—86 steht in genauer Beziehung zu dieser Frage.

2) Die Angaben über die Literatur vor Haüy sind zum Theil aus Marx Gesch. d. Krystallkunde. Karlsruhe 1825 entnommen. In Bezug auf Westfeld u. Bergman folge ich ihm gänzlich.

3) Micrographia. London 1667. fol.

p. 85: I think, had I time and opportunity, I would make probable, that all these regular Figures, that are so conspicuously various

gewesen zu sein. Er entwickelte seine theoretischen Vorstellungen wesentlich an den Krystallformen des Alauns, von denen er zeigte, dass sie sich sämmtlich durch Aneinanderlegung von gleichen Kugeln, und zwar nur durch solche nachahmen lassen. Auch den Würfel des Steinsalzes ahmte er durch kubisch zusammengelegte Kugeln nach. Diese verschiedenen Experimente mit Kugeln erläutert er durch mannigfache Zeichnungen. Da es ihm nun überhaupt gelang, sämmtliche ihm bekannte Krystallgestalten durch Zusammenlegung von Kugeln und von ein oder zwei anderen sehr einfachen Körpern (welche? giebt er nicht an) aufzubauen, so dachte er die Krystalle wirklich durch derartigen Zusammentritt von gleichen Theilchen entstanden, die er in den meisten Fällen als kugelförmig voraussetzte.

Andere Vorstellungen entwickelte gegen den Ausgang des siebzehnten Jahrhunderts Domenico Guglielmini,[1]) obwohl auch er wesentlich dasselbe Beispiel des Alauns seinen Betrachtungen zu Grunde legte. Er stellte sich nämlich das Alaunoktaëder aus kleinen Oktaëdern zusammengesetzt vor,

---

and curious, arise only from three or four several positions or postures of *Globular* particles, and those the most plain, obvious and necessary conjunctions of such figured particles that are possible. . . .

And this I have ad oculum demonstrated with a company *of bullets and some few other very simple bodies;* so that there was not any regular Figure, which I have hitherto met withall, of any of those bodies that I have above named, that I could not with the composition of *bullets or globules, and one or two other bodies,* imitate, even almost by shaking them together. . . .

p. 86: And there is no one Figure, into which *Alum* is observed to be crystallized, but may *by this texture of globules be imitated and by no other*. . . .

I could instance also in the Figure of Sea-salt and Sal gem, that it is composed of a texture of Globules, placed in a *cubical* form, and that all the Figures of those Salts may be *imitated by this texture of Globules, and by no other whatsoever.* And that the forms of Vitriol and of Salt-Peter, as also of Crystal, Hore-frost, etc. are compounded of *these two textures, but modulated by certain properties.*

1) Riflessioni filosofiche dedotte dalle figure de' sale. Bonon. 1688. Dann: De salibus dissertatio epistolaris. 8°. Venet. 1705. Hier heisst es p. 2: Determinatam figuram non ab universali aut particulari architectonico spiritu, sed a primarum particularum schemate unice esse derivandam. p. 10: Corpuscula insectilia, terminata planis superficiebus, ita ad invicem inclinatis, ut simplicem aliquam includant figuram.

welche natürlich leere Zwischenräume zwischen sich liessen. So führte er überhaupt die äussere Krystallgestalt überall auf die Gestalt der Elementartheilchen zurück, welch' letztere er von ebenen Flächen begrenzt sein liess. Er zuerst sprach auch das Princip aus, dass die Spaltbarkeit in Krystallen derselben Substanz konstant dieselben Formen liefert, und diese letzteren legte er den Elementartheilchen bei. Alle Gestalten der Salze dachte er aus denselben Grundformen (Würfel, Oktaëder, sechsseitiges Prisma, geschobenes Prisma) zusammengesetzt, welche mannigfach aufgebaut und durch eine gewisse magnetische Kraft aneinandergezogen und verwoben scheinbar neue Gestalten hervorbringen.

Nach diesen beiden, zu ihrer Zeit wohl nicht hinreichend gewürdigten und doch schon sehr beachtenswerthen, Versuchen nimmt die eigentliche stetige Entwickelung der Theorie ihren Ausgang von der Beobachtung der rhomboëdrischen Spaltbarkeit des Kalkspaths, an welche mehrere Forscher nacheinander ihre theoretischen Ideen anknüpfen. Am frühesten Christian Huygens.[1]) Dieser sieht die Regelmässigkeit der Krystalle als eine Folge der Anordnung der sie zusammensetzenden gleichen, aber unsichtbar kleinen, Theilchen an, und denkt sich dieselben beim Kalkspath als Rotationsellipsoide (deren Axenverhältniss sehr nahe $= 1 : \sqrt{8}$), wohl nach Analogie mit der von ihm ermittelten Gestalt der Elementarwellenfläche der ungewöhnlich gebrochenen Strahlen bei derselben Substanz. Ein aus nebeneinandergelegten sich berührenden Rotationsellipsoiden aufgebautes Rhomboëder muss dann nach Ebenen parallel den Rhomboëderflächen zerbrechen, weil sich dabei jedes Sphäroid der einen Schicht nur von dreien der Nachbarschicht trennt, von welchen es sogar nur eins mit der abgeplatteten Oberfläche, die beiden anderen dagegen nur mit den Rändern berührt. Als weiteren Beweis seiner Ansicht führt er die grössere Härte beim Hinab- als beim Herauffahren längs der kurzen Rhombendiagonale an. Während im ersteren Fall das Messer glatt hinübergleitet, fasst es im zweiten die Sphäroide von unten „beinahe wie die Schuppen eines Fischs".

1) Traité de la lumière. Leyde 1690. 4⁰. p. 92—96. Dann in Opera reliqua. Amstelod. 1728: De lumine. Cap. V. p. 70.

Huygens' Ideen scheinen keinen fruchtbaren Boden bei seinen Zeitgenossen gefunden zu haben, denn es vergingen mehr als zwei Menschenalter, bis — in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts — die Frage nach der Krystallstruktur von Neuem, und augenscheinlich unabhängig von allen Vorgängern, aufgenommen wurde; und zwar wieder im Anschluss an die Spaltungsbeobachtungen beim Kalkspath. So sagt C. F. G. H. Westfeld[1]) bei der Beschreibung der verschieden gestalteten Kalkspathkrystalle: „Alle Spathkrystalle lassen sich aus rautenförmigen Stücken zusammensetzen, oder vielmehr die Natur setzt sie wirklich daraus zusammen; folglich ist die Hauptursache der Bildung bei allen einerlei. Nun fragt es sich nur, warum sich die rautenförmigen Krystalle in Krystalle von einer anderen Bildung zusammensetzen?"

Etwa gleichzeitig gelang es J. G. Gahn, einem Schüler Torbern Bergmans, aus dem Kalkspathskalenoëder einen rhomboëdrischen Kern herauszuschälen. An diese Beobachtung scheint Bergman[2]) seine theoretischen Entwickelungen angeschlossen zu haben. Weil sich nämlich aus allen, auch noch so verschieden gestalteten Kalkspathkrystallen dasselbe Rhomboëder herausspalten lässt, so nahm er an, sie entständen sämmtlich durch Aufschichtung von rhomboëdrischen Grundkörpern; diese Vorstellung erläutert er durch Zeichnungen, deren eine z. B. das gewöhnliche Kalkspathskalenoëder aus lauter kongruenten, parallel aneinanderliegenden kleinen Rhomboëdern aufgebaut zeigt. Auch die Gestalten des Turmalins, Granats, Schwefelkieses, Hyacinths, Harmotoms und einiger Salze lässt er aus ähnlichen Grundkernen in ähnlicher Weise entstehen.

Wenn hiermit auch schon wesentliche Grundlagen zur Aufstellung einer Theorie der Krystallstruktur gewonnen waren, so ist eine solche in allgemeinster, das ganze Reich der Krystalle umfassender Weise doch erst von Réné Just

---

1) Mineralogische Abhandlungen. Stück 1. Göttingen u. Gotha. 1767. 8°.

2) Variae crystallorum formae a Spato ortae, in den Nov. Acta Reg. Soc. Sc. Upsal. Vol. I. 4°. 1773. Hier auf pag. 9 not. die Nachricht von der Gahnschen Beobachtung. Ferner: De formis crystallorum, in Opusc. Vol. II. Ups. 1780.

Haüy [1]) entwickelt worden, so dass dieser als der eigentliche Begründer dieses Zweiges der Wissenschaft angesehen werden muss. Es lässt sich kaum feststellen, inwieweit seine Ideen durch die Arbeiten Bergmans beeinflusst worden sind; der Einfluss darf jedenfalls nicht allzu gering angeschlagen werden,[2]) wenn auch, wie Haüy selbst erzählt,[3]) die nächste Veranlassung zur Entwickelung seiner Ideen eine in seinem Besitz befindliche sechsseitige Kalkspathsäule mit geraden Endflächen gewesen ist, die schräg abgebrochen war, so dass eine spiegelnde Rhomboëderfläche zum Vorschein kam.

Die bei einem Kalkspathkrystall sich gleichsam von selbst darbietende Vorstellung, dass er aus kongruenten, parallel nebeneinander liegenden Rhomboëdern aufgebaut sei, verallgemeinerte Haüy und dachte sich überhaupt jeden Krystall aus Reihen parallel nebeneinander liegender kongruenter Molekeln von parallelepipedischer Gestalt zusammengesetzt. Von dieser Grundanschauung aus liessen sich dann sämmtliche mögliche Krystallformen einer Substanz konstruiren. In welcher Weise Haüy hierbei verfuhr, mag an einem Beispiel verfolgt werden. Gegeben sei ein Würfel, der aus lauter kongruenten, lückenlos

---

1) Die früheste hergehörige Abh. fällt in das Jahr 1781, nämlich im Journ. de Phys. Mai 1782. p. 366: Extrait d'un Mém. s. l. structure des cristaux, approuvé par l'Acad. Roy. d. Sc. le 21 Févr. 1781. Dann Journ. d. Phys. Juillet 1782. p. 33: Mém. s. l. structure des spaths calcaires. 22 Dec. 1781. Andere hergehörige Schriften sind: Essai d'une Théorie s. l. structure des cristaux. Paris 1784. 8°. Traité de Cristallographie. 2 vol. in 8°. avec Atlas in 4°. Paris 1822. Traité de Minéralogie. Sec. édit. Paris 1822.

2) Essai d'une théorie etc. p. 39: Dans le temps, où je commençais à me livrer à l'étude de la structure des cristaux, j'ai eu occasion de lire un Mém. de M. Bergman sur la cristallisation, qui se trouve parmi ceux de l'Acad. d'Upsal pour l'année 1779. Im Traité de Minéral. (1822) I. p. 15, Anmerkung, heisst es: l'Académie des Sciences avait déjà connaissance de mes premiers essais lorsqu'elle reçut le Mém. de Bergman, qui me fut communiqué, comme étant propre à m'intéresser par le rapport qu'il avait avec mon travail.

3) Essai d'une théorie etc. p. 10: „Une observation que je fis sur le spath calcaire en prisme à six plans, terminé par deux faces exagones, me suggéra l'idée fondamentale de toute la théorie dont il s'agit. J'avois remarqué qu'un cristal de cette variété se trouvoit cassé obliquement, de manière que la fracture présentoit une coupe nette, et qui avoit ce brillant, auquel on reconnoît le poli de la Nature.“ Aehnliche Aeusserung im Traité de Cristall. I. p. 32.

neben- und aufeinandergeschichteten parallelen Würfelchen aufgebaut sei. Legt man nun auf alle Seitenflächen des Würfels Schichten und immer neue Schichten jener kleinen Würfel, so jedoch, dass jede folgende Schicht an jedem ihrer 4 Ränder um eine Molekelreihe schmaler als die vorhergehende Schicht ist, so findet sich dadurch schliesslich auf jede Würfelfläche eine vierseitige Pyramide mit treppenförmigen Flächen aufgesetzt. Weil nun hierbei die in einer ursprünglichen Würfelkante zusammenstossenden Seiten zweier Nachbarpyramiden in eine Ebene fallen, so ist hierdurch das Rhombendodekaëder abgeleitet. Aendert man bei dieser Construktion nur das eine, dass man jede folgende Schicht an jedem ihrer Ränder um zwei Molekelreihen schmaler macht als die vorhergehende (oder um drei, vier u. s. f.), so entsteht statt des Rhombendodekaëders ein Pyramidenwürfel. — Analog wie hier bewirkt Haüy in allen Fällen die Ableitung der Krystallformen auseinander durch Operationen mit parallelepipedischen Molekeln, deren reihenweises Weglassen er mit dem Namen *Dekrescenz* oder *Subtraktion* bezeichnet, und die daher selber *subtraktive Molekeln* genannt werden.

Indess muss man nicht meinen, dass Haüy in allen Fällen diese subtraktiven Molekeln für die wirklichen kleinsten Bausteine der Krystalle oder, wie er sich ausdrückt, für die *integrirenden Molekeln* gehalten hat, welche nicht weiter getheilt werden können, ohne bereits in die verschiedenen chemischen Atome zu zerfallen. Beim Kalkspath freilich und bei allen den Substanzen, die durch Spaltung nur in Parallelepipeden zerfallen, decken sich beide Begriffe. In andern Fällen aber verhält es sich anders. Beim Turmalin z. B., der parallel den Flächen eines Rhomboëders und zugleich, wenn auch undeutlicher, parallel denen einer sechsseitigen Säule Spaltbarkeit besitzt, zerfällen die Rhomboëder noch weiter in je 6, nicht reguläre, Tetraëder, indem nämlich jede der 6 Säulenflächen durch die Hauptaxe und je eine Randecke des Rhomboëders gelegt wird. Diese Tetraëder nimmt Haüy als die integrirenden Molekeln; sie befinden sich, wie man bemerkt, nicht sämmtlich in paralleler Lage. Aber als subtraktive Molekeln zur Ableitung der verschiedenen möglichen Formen dieser Krystallreihe dienen ihm auch hier die parallel nebeneinander befindlichen Rhomboëder.

Besondere Schwierigkeiten verursachten ihm Krystalle mit oktaëdrischer Spaltbarkeit (z. B. Flussspath). Denn bei solchen war es nicht mehr möglich, die integrirenden Molekeln *lückenlos* nebeneinander zu denken, wie in allen übrigen Fällen; sondern sie mussten hier entweder, wenn sie oktaëdrisch gestaltet angenommen wurden, mit tetraëdrischen Zwischenräumen aufgeschichtet gedacht werden, oder, bei tetraëdrischer Gestalt, mit oktaëdrischen Zwischenräumen. Indessen benutzte er als subtraktive Molekel auch hier ein Rhomboëder, das jedoch nicht homogen, sondern nur zum Theil massiv, zum Theil aber leer war, indem es nämlich aus einem Oktaëder mit je einem diesseits und jenseits angesetzten regulär-tetraëdrischen Hohlkörper, oder aus jenem hohl gedachten Oktaëder mit angesetzten massiven Tetraëdern bestand.

Besonders wichtig für unsere Betrachtung ist Haüys ausdrückliche Erklärung,[1]) *die Dekrescenzen entständen immer durch Reihen von Parallelepipeden, auch wenn die integrirenden Molekeln andere Gestalt besässen,* und es sei für die Krystallographie von geringer Wichtigkeit zu wissen, ob die subtraktive Molekel (d. i. also die krystallographische Einheit) schon selbst integrirende Molekel oder noch aus anders geformten integrirenden Molekeln zusammengesetzt sei.[2])

Gegen Haüys Theorie lassen sich hauptsächlich drei Einwände erheben: *Erstens* erweist sie sich bei genauerer Betrachtung als willkührlich. Denn wenn sie auch, so lange sie auf Krystalle mit parallelepipedischer Spaltbarkeit angewandt wird, aus den Thatsachen abstrahirt erscheint, so ist dies doch nicht mehr der Fall bei der Anwendung auf solche Krystalle, welche entweder andere Spaltbarkeit besitzen, oder denen eine deutliche Spaltbarkeit überhaupt ab-

---

1) Vgl. z. B. Abriss der Theorie der Struktur der Krystalle. In Grens Journal d. Phys. Bd. 2. 1795. pag. 451 unten.

2) Während Haüy die polyedrische Gestalt der Molekeln ohne Weiteres annahm, glaubte J. J. Prechtl (Gehlens Journ. f. Phys., Chem. u. Min. VII. 1808: Theorie der Krystallisation) dieselbe dadurch erklären zu können, dass er sich die Molekeln der flüssigen Substanz im Momente der Krystallisation als weiche Kugeln dachte, die beim Zusammentritt durch die gegenseitige Pressung sich zu Würfeln u. s. w. umgestalteten.

geht. Namentlich in Bezug auf letztere herrscht grosse Unbestimmtheit und Willkür bei der Festsetzung der Gestalt der subtraktiven Molekel. — Weil nun der Theorie auch kein allgemeiner axiomartiger Satz zu Grunde liegt, der entweder selbstverständlich oder doch wegen seiner Einfachheit oder aus sonstigen Gründen plausibel wäre, so lässt sie sich von Willkür nicht frei sprechen. — Ein *zweiter* Vorwurf trifft den Begriff der subtraktiven Molekel. Dieselbe hat nämlich zwar eine bestimmte geometrische, aber keine konsequent festgehaltene physische Bedeutung; bald ist sie die wirkliche physische, bald nur eine zu Konstruktionen bequeme geometrische Einheit. — Auf eine andere Inkonsequenz bezieht sich der *dritte* Einwand. Wie erwähnt, müssen bei den oktaëdrisch spaltbaren Krystallen zwischen den integrirenden Molekeln leere Zwischenräume angenommen werden, was sonst bei keinem Krystall vorausgesetzt wird. Diese Eigenthümlichkeit des Baus verräth sich aber durch keine sonstige Eigenschaft; also ist sie überhaupt höchst unwahrscheinlich.

Von den beiden letztgenannten Mängeln befreite L. A. Seeber,[1]) Prof. der Physik zu Freiburg i. B., die Haüysche Theorie vermittelst einer geringen Umgestaltung. Anstatt Haüys einander berührender Molekeln substituirte er nämlich in deren Mitte andere, die er so klein dachte, dass sie die zur Erklärung der Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit der festen Körper nothwendigen Abstände erhielten; ihre Gestalt nahm er kugelförmig an. Bei dieser Substitution bleibt die Haüysche Erklärung der Formen und der Spaltungsflächen der Krystalle im Wesentlichen bestehn, nur erfährt sie in manchen Fällen eine beträchtliche Vereinfachung. „Denn (l. c. pag. 244—245) substituirt man bei denjenigen Substanzen, wobei Haüy zur Erklärung der natürlichen Trennungsflächen *prismatische* und *tetraëdrische* molécules intégrantes annimmt, die neuen kleineren Atome nicht anstatt *dieser*, sondern anstatt der parallelepipedischen molécules soustractives, so lassen sich doch nach allen Richtungen der natürlichen Trennungsflächen Ebenen, welche kein Molekül schneiden, durch die von ihnen gebildeten Systeme legen, und mithin

1) Versuch einer Erklärung des innern Baus der festen Körper. In Gilberts Annalen d. Phys. 1824. Bd. 76. p. 229—248.

diese Flächen sich ebensogut erklären, als wenn man die neuen Atome anstatt der molécules intégrantes substituirt hätte. Man braucht daher den neuen sich nicht berührenden Atomen keineswegs die verschiedenen, zum Theil komplicirten, Stellungsarten zu geben, die sie durch eine beständige Substitution anstatt seiner molécules intégrantes erhalten würden, sondern nur die *einzige* einfache, die sie dadurch erhalten, dass man sie in allen Fällen anstatt der molécules soustractives substituirt. Wir werden diese Stellungsart die *parallelepipedische* nennen."

Unabhängig von Seeber, dessen Abhandlung wenig Beachtung gefunden zu haben scheint, gestaltete fast zwei Jahrzehnte später G. Delafosse,[1]) ein Schüler Haüys, die Theorie in derselben Weise um. Indem er die Krystallmolekeln einfach als materielle Punkte ansah, d. h. indem er nur ihre Schwerpunkte in Betracht zog, und gleich Haüy von der fundamentalen Thatsache der Spaltbarkeit ausging, argumentirte er folgendermassen:

Wenn ein Krystall Spaltbarkeit parallel einer gewissen Ebene besitzt, so heisst das: es ist von jeder beliebigen Stelle aus möglich, eine Spaltungsebene parallel jener Ebene hervorzurufen. Daraus folgt, dass die Massenpunkte auf lauter Ebenen, parallel dieser Ebene, vertheilt sind, welche man natürlich in gleichen Abständen voneinander zu denken hat. — Wenn nun noch eine zweite Spaltbarkeit parallel einer anderen Ebene vorhanden ist, so schliesst man ebenso, dass die Massenpunkte auch auf dieser Schaar von parallelen Ebenen angeordnet sind; doch ist der Abstand je zweier Nachbarebenen dieser Schaar im Allgemeinen verschieden von dem Abstande der vorigen Schaar zu denken. Hiernach können die Massenpunkte nur längs geradliniger Reihen, parallel der Schnittlinie beider Spaltungsebenen, vertheilt sein. — Besitzt schliesslich der Krystall noch eine dritte Spaltbarkeit, so müssen die Massenpunkte auch noch auf äquidistanten Ebenen parallel dieser dritten Spaltungsebene angeordnet sein. Folglich sind die Massenpunkte in der Weise gleichförmig im

1) Recherches s. l. cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques. In den Mém. présentés par divers savants à l'académ. roy. d. scienc. de l'Inst. d. France. T. 8. Paris 1843. (Mém. des savants étrangers.)

Raume vertheilt, dass sie *in den Schnittpunkten dreier Züge von je parallelen äquidistanten Ebenen liegen, also ein räumliches Netz mit parallelepipedischen Maschen (ein Raumgitter) bilden.* Diese Anordnung macht dann auch das Vorhandensein noch anderer als der 3 zur Ableitung benutzten Spaltungsrichtungen verständlich. Indessen ist ersichtlich, dass diese Ableitung der Struktur ihren Dienst bei denjenigen Krystallen versagt, welche nicht nach 3 verschiedenen Ebenen spaltbar sind.

Bedenkt man, dass schon Haüy seine subtraktive Molekel wesentlich als geometrische Einheit, ohne Rücksicht auf ihre physische Beschaffenheit anwendet, und dass Delafosse und Seeber nichts anderes gethan haben, als die parallelepipedisch gestaltete subtraktive Molekel Haüys durch ihren Mittelpunkt, resp. durch eine kleine ihn umgebende Kugel zu ersetzen, so muss man anerkennen, dass die Haüysche Theorie hierdurch ganz im Geiste ihres Begründers fortgebildet worden ist und dabei wesentlich an Konsequenz und Einfachheit gewonnen hat.

Auf scheinbar anderem Wege wurde eine Umgestaltung der Haüyschen Theorie von Wollaston angebahnt und von Dana konsequent durchgeführt; doch ist das Resultat im Wesentlichen nicht verschieden von dem eben auseinandergesetzten. Will. Hyde Wollaston[1]) knüpfte an den dritten der erwähnten schwachen Punkte von Haüys Theorie an, wonach bei oktaëdrisch spaltbaren Krystallen die tetraëdrischen Molekeln mit oktaëdrischen Hohlräumen wechseln (oder umgekehrt). Er weist darauf hin, dass die Molekeln, welche sich hier nur mit den Kanten berühren, nicht in stabilem Gleichgewicht sein können. Daher setzt er bei diesen Krystallen die Elementartheilchen als gleiche Kugeln voraus, die durch gegenseitige Anziehung diejenige Anordnung angenommen haben, welche sie einander so nah als möglich bringt. Legt man auf 3 gleiche sich berührende Kugeln eine gleiche vierte, die vorigen berührend, so bestimmen die 4 Kugelcentra ein reguläres Tetraëder. Stellt man aber in einer Ebene 4 Kugeln zu einem Quadrat zusammen, und setzt dann mitten auf und

1) Phil. Transact. 1813. p. 51—63. On the elementary Particles of certain crystals.

mitten unter diese 4 je eine Kugel, so entsteht ein Oktaëder. Durch Zufügung je einer Kugel auf einem Paar entgegengesetzter Seiten dieses Oktaëders entsteht ein scharfes Rhomboëder. In der That ist der in dieser Weise weitergebaute Kugelhaufen völlig geeignet, die Struktur der oktaëdrisch spaltbaren Krystalle darzustellen. Wichtig ist Wollastons Bemerkung, man könne statt der Kugeln auch einfach mathematische Punkte annehmen, begabt mit ringsherum gleich wirkenden anziehenden und abstossenden Kräften, so dass ihre Ausdehnung nur virtuell kugelförmig sei; denn aus der Vereinigung solcher Theilchen gingen dieselben Formen hervor, wie aus denjenigen undurchdringlicher Kugeln. Wirklich bilden die Kugelcentra des obigen Kugelhaufens ein Raumgitter, das wir nachher als das oktaëdrische kennen lernen werden. — Wie Wollaston zunächst auf den alten Hookeschen Gedanken der kugelförmigen Krystallelemente zurückgekommen war, den er freilich selbstständig von Neuem gefunden hatte, so gelangte er weiter auf die Huygenssche Vorstellung von dem Bestehn des Kalkspaths aus aneinanderliegenden flachen Rotationsellipsoiden. Sodann nahm er für die hexagonalen Prismen des Berylls und anderer Mineralien verlängerte Rotationsellipsoide als Elementartheile an. Zur Versinnlichung der Struktur kubisch spaltbarer Krystalle endlich dachte er sich 2 Arten gleich grosser Kugeln (z. B. schwarze und weisse) so gelagert, dass die abwechselnden Ecken eines Würfels von Kugeln erster Art, die zwischenliegenden Ecken von Kugeln der zweiten Art eingenommen werden; beide Kugelarten bilden dann 2 durcheinander gesteckte Tetraëder, entsprechend dem hemiëdrischen und pyroëlektrischen Verhalten mancher Würfelkrystalle.

Auch Dav. Brewster[1]) theilte die Ansicht von der sphäroidischen Gestalt der Elementartheilchen der Krystalle, ohne indessen diesen Gedanken specieller auszuführen. Denn er beabsichtigte nicht sowohl, die Struktur der verschiedenen Krystalle zu verfolgen, als vielmehr die Entstehung der Doppelbrechung der Krystalle aus dem gegenseitigen Druck der

1) Phil. Transact. for 1830. London. On the production of regular double refraction in the molecules of bodies by simple pressure, etc. p. 87—95.

Theilchen abzuleiten (und zwar nach Analogie der Beobachtung, dass ein Tropfen eines Wachs- und Harzgemisches, den man plattdrückt, völlig das Verhalten einer senkrecht zur optischen Axe geschnittenen, einaxigen positiven Krystallplatte zeigt).

Während Wollaston die Ersetzung von Haüys parallelepipedischer subtraktiver Molekel nur in einigen Fällen ausgeführt hatte, so verfolgte nach ihm James D. Dana[1]) denselben Weg weiter und ersetzte das Haüysche Parallelepiped in allen Fällen durch das in dasselbe eingeschriebene Ellipsoid. Dies geschieht so. Verbindet man die Mittelpunkte je zweier Gegenseiten eines Parallelepipeds durch eine Gerade, so halbiren sich diese 3 Geraden im Mittelpunkt, und jede durch je 2 von ihnen bestimmte Ebene ist parallel einem Paar Parallelepipedflächen. Diese Linien nun, als *konjugirte Durchmesser* eines Ellipsoids angesehn, bestimmen dasselbe völlig; es hat die Eigenschaft, die Parallelepipedflächen in ihren Mitten zu berühren, da ja die durch einen Endpunkt des einen von 3 konjugirten Durchmessern an das Ellipsoid gelegte Tangentialebene den beiden anderen Durchmessern parallel ist. Das so in das Parallelepiped eingeschriebene Ellipsoid betrachtet Dana als die subtraktive Molekel, die nun in der Haüyschen Art zur Ableitung der verschiedenen Gestalten einer Krystallreihe dient, und die jetzt gleichzeitig identisch mit der integrirenden Molekel ist. — Die konjugirten Durchmesser sind zugleich die krystallographischen Axen, und je nach ihrem Längenverhältniss und ihren Winkeln werden 8 Hauptformen der Molekel unterschieden.[2]) Zur Erklärung der Aneinanderlagerung dieser Molekeln zu einem Krystall wird angenommen, die Anziehung einer Molekel sei am

---

1) Silliman American Journal. Ser. I. vol. 30. 1836. p. 275 u. 296: On the formation of Compound or Twin crystals. Ser. II. vol. 4. p. 364 (1847) und vol. 5. p. 100 (1848): On certain laws of Cohesiv Attraction (as illustradet by crystals). In den älteren Auflagen seines System of Mineralogy (z. B. in der dritten, 1850) finden sich seine Ansichten ebenfalls entwickelt; in den neueren nicht mehr.

2)

1) Alle 3 konjug. Durchmesser senkrecht (identisch mit den Ellipsoidhauptaxen).	Alle 3 gleich.	Würfel.
	Nur 2 gleich.	Grades quadratisches Prisma.
	Alle 3 ungleich.	Grades rektanguläres Prisma.

stärksten an den Enden der konjugirten Durchmesser; die Wirkung dieser Durchmesser sei polarisch, so dass die gleichnamigen Enden sich abstossen, die entgegengesetzten sich anziehn; jedoch sollen nur die homologen konjugirten Durchmesser aufeinander wirken. Diese Hypothesen drücken nichts anderes aus als den Satz: Bei der Krystallisation gruppirt jede Molekel 6 andere in paralleler Stellung um sich und wird von ihnen in den Endpunkten dreier konjugirten Durchmesser berührt. — Ebenso kann der Versuch zur Erklärung der Bildung von Sekundärflächen kaum für mehr als eine Umschreibung der Thatsachen gelten.

Eben dies gilt von einem auf derselben Vorstellung ellipsoidischer und polar wirkender Molekeln beruhenden Versuch Rob. T. Forsters,[1]) der die Haüysche reihenweise Dekrescenz durch das Unwirksamwerden der freien Pole bei den Molekeln der äussersten Reihen erklärte, ohne indessen für dieses Unwirksamwerden wirklich zwingende Gründe beizubringen.

Sieht man von Danas mechanischem Erklärungsversuch ab, und beachtet nicht sowohl die Gestalt der Molekel, deren Annahme als Ellipsoid doch sehr willkürlich ist, als vielmehr nur die gegenseitige Lage ihrer Centra, so findet man letztere mit der Lage der Massenpunkte in der Seeber-Delafosse'schen Vorstellung identisch; denn dort wie hier sind es nur die Mittelpunkte von Haüys subtraktiven Molekeln, die allein in Betracht gezogen werden. — Somit führen alle von verschiedenen Seiten her unternommenen Fortbildungen der Haüyschen Theorie im Grunde zu demselben Ergebniss: *nämlich*

---

2) 1 Durchmesser senkrecht auf den 2 anderen, die einen schiefen Winkel einschliessen. (Ersterer ist eine Ellipsoidhauptaxe.)	Beide schiefen Durchmesser gleich.	Grades rhombisches Prisma.
	Beide schiefen Durchmesser ungleich.	Grades rhomboidisches Prisma.
3) Alle 3 konjug. Durchmesser schiefwinklig.	Alle 3 gleich.	Rhomboëder.
	Nur 2 gleich.	Schiefes rhombisches Prisma.
	Alle 3 ungleich.	Schiefes rhomboidisches Prisma.

1) Phil. Magaz. 4 ser. vol. X. 1855. p. 108. On the molecular constitution of crystals.

zur parallelepipedischen Anordnung der Mittelpunkte der Krystallelemente.

Der nächste Schritt, der bei Annahme dieser verbesserten Haüyschen Theorie zu thun war, und der, schon vor Veröffentlichung von Danas und Delafosses erwähnten Abhandlungen, von M. L. Frankenheim gethan wurde, war die geometrische Untersuchung der verschiedenen möglichen Gattungen von Raumgittern, um festzustellen, ob dieselben mit den verschiedenen von der Natur dargebotenen Krystalltypen übereinstimmen. Frankenheim[1]) machte zunächst nur sein Resultat, ohne Andeutung eines Beweises, bekannt, weil er sich damals „mit der Annahme von Theilchen, die durch Zwischenräume getrennt sind, nicht befreunden konnte;" es lautete dahin, dass es nur 15 verschiedene netzartige (d. h. raumgitterartige) Anordnungen von Theilchen geben könne, und dass dieselben mit den von Frankenheim aus dem äusseren Habitus und der Spaltbarkeit abstrahirten 15 Grundformen der Krystalle übereinstimmten. Dies Resultat ist indess nicht ganz richtig. Denn *es giebt*, wie später A. Bravais[2]) in einer musterhaften geometrischen Untersuchung gezeigt hat, *nur 14 Hauptarten von Raumgittern, die sich in 7 durch ihre Symmetrie unterschiedene Abtheilungen bringen lassen.*[3])

1) „Die Lehre von der Cohäsion." Breslau 1835. p. 311 u. 312. Sodann eingehender im „System der Crystalle", in den Nova Acta Acad. Caesareae Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosorum. 1842. T. 19. Abth. 2. p. 471—660.

2) Mém. s. l. syst. formés par d. points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace, im Journal de l'école polytechn. T. 19. Paris 1850. p. 1—128. Dasselbe in dem Sammelwerk: Études crystallographiques. Paris 1866. 4°.

3) Erst nach Bravais veröffentlichte Frankenheim auch seine Ableitung („Die Anordnung der Moleküle im Krystall." Poggend. Ann. d. Phys. 97. 1856. p. 337—382), bei der er nun ebenfalls nur 14 Anordnungen aufführt, „weil er es jetzt zweckmässiger finde, im monoklinischen System zwei der früher angenommenen Unterabtheilungen zusammenzufassen". Bravais hatte aber in seiner Abhandlung (l. c. p. 97 Anmerk.) ausdrücklich darauf hingewiesen, dass jene beiden Frankenheimschen Anordnungsarten identisch seien. Frankenheims Ableitung ist übrigens nicht hinreichend streng, und steht an Klarheit und Anschaulichkeit der Bravais'schen nach. — Von einem rein mathematischen Gesichtspunkte aus haben sich mit den Raumgittern auch noch beschäftigt:

Zum Verständniss dieser Eintheilung der Raumgitter ist es nöthig, einige Bemerkungen vorauszuschicken. Der Grad der Symmetrie eines Raumgitters lässt sich auf 2 Arten angeben: entweder durch Aufzählung seiner Symmetrieaxen (so verfährt Bravais), oder seiner Symmetrieebenen.[1])

Unter einer Symmetrieaxe versteht man eine solche Gerade, um welche man ein geometrisches Gebilde um einen gewissen Winkel drehen muss, wenn jeder vorher besetzt gewesene Punkt des Raums wieder mit einem Punkt des Gebildes besetzt sein soll. Die Axe heisst n-zählig (oder „von der Ordnungszahl n", nach Bravais), wenn der kleinste, die Deckung herbeiführende, Winkel gleich dem n-ten Theil der vollen Umdrehung, d. h. $= \frac{2\pi}{n}$, ist.

Symmetrieebene ist eine Ebene, die ein geometrisches Gebilde so theilt, dass die eine Hälfte das Spiegelbild der anderen ist.

Nun lässt sich leicht beweisen, dass in einem Raumgitter das Vorhandensein einer geradzähligen Symmetrieaxe ($n = 2, 4, 6$), die Existenz von senkrecht zu ihr liegenden Symmetrieebenen nach sich zieht, und umgekehrt. Daher würde es genügen, entweder nur das Vorhandensein und die Zähligkeit (d. h. den Werth von n) von Symmetrieaxen, oder nur die Zahl und Lage der vorhandenen Symmetrieebenen als Eintheilungsgrund für die Raumgitter zu benutzen. Trotzdem füge ich, weil es nachher gebraucht wird, der Charakteristik durch Symmetrieaxen immer auch noch diejenige durch Symmetrieebenen [in Klammern] bei. — Weil immer nur von grenzenlos ausgedehnten Raumgittern die Rede ist, so wird unter *einer* Symmetrieaxe oder -Ebene immer eine Schaar unendlich vieler paralleler Axen oder Ebenen verstanden.

Zur Schilderung eines Raumgitters genügt die Angabe der Gestalt des kleinsten, durch 8 nächstbeisammenstehende

---

P. Lejeune-Dirichlet: Ueb. d. Reduktion der posit. quadr. Form u. s. f. in Crelle's Journal 40 p. 209 ff.; und Herr E. Selling: Des formes binaires et ternaires im Journ. de Math. 3 sér. t. 3. 1877. p. 21 ff.

1) So verfuhr ich bei einer etwas vereinfachten Ableitung der verschiedenen Gattungen von Raumgittern. Pogg. Ann. d. Phys. 132 p. 75. 1867 „Die Gruppirung der Moleküle in den Krystallen".

Gitterpunkte bestimmten Parallelepipeds (Elementarparallelepipeds oder Kerns); doch empfiehlt es sich in einigen Fällen, der leichteren Anschaulichkeit wegen, die Raumgitterpunkte in anderer Weise in Gedanken zusammenzufassen. Alsdann wird (nach Bravais) unter einer *centrirten* Figur eine solche verstanden, deren Centrum mit einem Raumgitterpunkt besetzt ist.

Eintheilung der Raumgitter.[1])

I. Keine Symmetrieaxe. [Keine Symmetrieebene]: *Triklines Krystallsystem.*

1 Unterabtheilung: 1) Anordnung nach schiefwinkeligen Parallelepipeden (ohne eine der bei den folgenden Gittern vorkommenden Besonderheiten).

II. Eine zweizählige Symmetrieaxe. [Senkrecht dazu 1 Symmetrieebene]: *Monoklines Krystallsystem.*

2 Unterabtheilungen:
- 2) Anordnung nach klinorhombischen Säulen.
- 3) Anordnung nach geraden Parallelepipeden mit rhomboidischer Basis.

III. Drei aufeinander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen. [3 aufeinander senkrechte Symmetrieebenen, gehend durch je 2 Axen]: *Rhombisches Krystallsystem.*

4 Unterabtheilungen:
- 4) Anordnung nach geraden rhombischen Säulen.
- 5) Dieselbe mit centrirten Säulen.
- 6) Anordnung nach rechtwinkligen Parallelepipeden.
- 7) Dieselbe mit centrirten Parallelepipeden.

---

1) Ein Universalmodell der Raumgitter, welches durch Veränderung der Dimensionen und der Winkel alle 14 Hauptarten von Raumgittern zu veranschaulichen geeignet ist, ist vom Mechaniker Heckmann in Karlsruhe nach meinen Angaben konstruirt; es befindet sich im physikalischen Kabinet des Karlsruher Polytechnikums; eine Beschreibung desselben in Carls Repertorium für Experimentalphysik etc. Bd. XII; kürzer beschrieben im Bericht über die Ausstellung wissenschaftlicher Apparate im South Kensington Museum zu London 1876. Seite 942.

IV. Eine dreizählige Symmetrieaxe und senkrecht auf ihr 3 zweizählige. [3 Symmetrieebenen, senkrecht zu den zweizähligen Axen]: *Rhomboëdrisches Krystallsystem.*

1 Unterabtheilung: 8) Anordnung nach Rhomboëdern.

V. Eine vierzählige Symmetrieaxe und senkrecht auf ihr 4 zweizählige. [5 Symmetrieebenen, gehend durch je 2 Axen]: *Quadratisches Krystallsystem.*

2 Unterabtheilungen: { 9) Anordnung nach geraden quadratischen Säulen.
10) Dieselbe mit centrirten Säulen.

VI. Eine sechszählige Symmetrieaxe und senkrecht auf ihr 6 zweizählige. [7 Symmetrieebenen, gehend durch je 2 Axen]: *Hexagonales Krystallsystem.*

1 Unterabtheilung: 11) Anordnung nach geraden regulär dreiseitigen Säulen.

VII. Drei vierzählige, vier dreizählige und sechs zweizählige Symmetrieaxen, bezüglich gerichtet wie eines Würfels Kanten, Diagonalen und Verbindungslinien der Mitten zweier gegenüberliegenden Kanten. [9 Symmetrieebenen, senkrecht zu den vierzähligen und zweizähligen Axen]: *Reguläres Krystallsystem.*

3 Unterabtheilungen: { 12) Anordnung nach Würfeln.
13) Anordnung nach centrirten Würfeln.
14) Anordnung nach Würfeln mit centrirten Flächen.

N. B. Bei 13) ist das Elementarparallelepiped ein Rhomboëder, von dem 2 Nachbarflächen einen Winkel von 120° einschliessen; bei 14) ist es ein Rhomboëder, das aus einem Oktaëder mit 2, auf zwei Parallelflächen angesetzten, Tetraëdern besteht.

Es ist höchst bemerkenswerth, *dass die Raumgitter genau in dieselben 7 Abtheilungen zerfallen, die man als Krystallsysteme aus der Erfahrung abstrahirt hat*, so dass in vorstehender Tabelle einer jeden der 7 Raumgitterabtheilungen der Name des entsprechenden Krystallsystems beigesetzt werden konnte. Indessen darf man nicht übersehen, dass diese Uebereinstimmung doch keine ganz vollständige ist; sie findet nämlich nur zwischen den vollflächigen Krystallgestal-

ten und den Raumgittern Statt, *während solche Symmetrieverhältnisse, wie sie den Halbflächnern eigenthümlich sind, bei den Raumgittern nicht vorkommen.* Dies erhellt u. A. aus folgenden Beispielen:

Die Halbflächner des regulären Systems (Tetraëder, Pentagondodekaëder u. s. f.) besitzen keine vierzähligen Symmetrieaxen und auch nicht alle 9 Symmetrieebenen, wie die dem regulären Krystallsystem entsprechenden Raumgitter, sondern nur 4 dreizählige und 3 zweizählige Symmetrieaxen, gerichtet wie die Diagonalen und Kanten eines Würfels; Symmetrieebenen hat das Tetraëder 6, je eine gehend durch eine Kante; das Pentagondodekaëder aber nur 3 aufeinander senkrechte. — Das Tetraëder des quadratischen Systems hat keine vierzähligen Symmetrieaxen, sondern nur 3 aufeinander senkrechte zweizählige; ferner nur 2 Symmetrieebenen, je eine gehend durch eine der 2 gleichen Kanten, welche die Grundlinien der das Tetraëder begrenzenden gleichschenkligen Dreiecke bilden. — Das Tetraëder des rhombischen Systems hat gar keine Symmetrieebene, sondern nur 3 aufeinander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen; u. s. f. — Statt aus dieser Nichtübereinstimmung der Symmetrieverhältnisse von halbflächigen Krystallen und Raumgittern den Schluss zu ziehn, dass die Struktur der Halbflächner keine raumgitterartige sein könne, führt Bravais,[1]) nach dem Vorgange von Delafosse,[2]) eine Hülfshypothese ein, derzufolge der halbflächige Charakter schon den Molekeln innewohnen solle, deren Schwerpunkte aber nichtsdestoweniger nach Raumgittern, wie bei den vollflächigen Gestalten desselben Krystallsystems, angeordnet seien. So denkt sich z. B. Delafosse ein reguläres Tetraëder aus lauter kongruenten parallelen Tetraëderchen zusammengesetzt, deren Centra ein kubisches Raumgitter bilden.

Wenn nun diese Hülfshypothese auch nicht als unzulässig erklärt werden kann, so trägt sie doch jedenfalls nicht dazu bei, den Hauptvorwurf gegen die Haüy-Bravais'sche Theorie zu entkräften, nämlich den, *dass es willkürlich sei, bei allen*

---

1) Études cristallographiques im Journ. de l'école polytechn. T. 20. Paris 1851. Auch in dem gleichnamigen Sammelwerk Paris 1866.

2) Recherches s. l. cristallisation etc. in Mém. des savants étrangers. T. 8. Paris 1843.

Krystallen ohne Ausnahme, — auch bei den nicht parallelepipedisch spaltbaren, und besonders bei den Halbflächnern, — die Struktur als raumgitterartig vorauszusetzen. Warum sollte z. B. nicht eine derartige Anordnung der Molekelcentra in gewissen Krystallen möglich und sogar wahrscheinlich sein, bei der sie in einer Ebene die Ecken von lückenlos aneinanderliegenden regelmässigen Sechsecken, wie Bienenzellen, bilden?[1]) Und doch ist eine solche Anordnung bei Annahme der Raumgitterstruktur ausgeschlossen!

Um dem Vorwurf der Willkür, der alle bisherigen Theorien der Krystallstruktur traf, zu entgehen, versuchte ich[2]) 1867, aus einem an die Spitze gestellten, möglichst einfachen und selbstverständlichen Grundsatze alle überhaupt möglichen Strukturformen abzuleiten, nämlich aus dem *Grundsatze, dass die Punktvertheilung in einem unbegrenzt gedachten krystallinischen Punkthaufen um jeden Massenpunkt dieselbe ist, wie um jeden anderen.* Ich fand die Raumgitter als einzig mögliche Strukturformen für Krystalle, und dadurch schien die Haüy-Bravais'sche Theorie eine wesentliche Stütze erhalten zu haben. Indessen ist bei der Gewinnung dieses Resultats neben dem obigen Grundsatz noch eine zweite Voraussetzung unausgesprochen und gleichsam als selbstverständlich benutzt worden, nämlich die, *dass alle Molekeln einander parallel liegen.* Nur bei Annahme *beider* Voraussetzungen stellt sich die Raumgitterstruktur als einzig mögliche heraus (vgl. Cap. 4). Die zweite Voraussetzung ist aber keineswegs selbstverständlich und enthält eine grosse Beschränkung. Man übersieht z. B. unmittelbar, dass bei der oben erwähnten bienenzellenartigen Anordnung die einzelnen ein Sechseck bildenden Molekeln nicht in paralleler Lage befindlich sind.

Nun war schon 1863 (ohne dass es mir bekannt geworden war) von Herrn Chr. Wiener[3]) dieselbe Aufgabe in Angriff genommen. Nach ihm *„findet Regelmässigkeit in der Anordnung gleicher Atome dann statt, wenn jedes Atom die anderen*

1) Vgl. z. B. Wittwer: Die Molekulargesetze. 1871. p. 108 u. 109, und Fig. 5 u. 6.

2) Die Gruppirung der Moleküle in den Krystallen. In Poggend. Ann. 132. p. 75. 1867.

3) Chr. Wiener: Grundzüge der Weltordnung. Leipzig u. Heidelberg 1863. Zweite Ausgabe 1869. Erster Band: Atomenlehre p. 82 ff.

in übereinstimmender Weise um sich gestellt hat, u. s. f." Indem nun Wiener die Nebenannahme der Parallellagerung der Atome nicht machte, gelang es ihm, aus seinem Grundsatze nicht die Raumgitter allein, sondern auch noch andere Strukturformen abzuleiten, *so dass hiermit der erste Fortschritt über die Bravais'sche Theorie hinaus gemacht war.* Bei Anordnung in einer Ebene ergab sich, dass entweder „die gleichlaufende Stellung die Bedingung für die regelmässige Anordnung ist, bei welcher alle Atome in übereinstimmender Weise den anderen gegenüberstehn (dies giebt ein parallelogrammatisches Netz), oder dass höchstens 2 umgekehrte Lagen möglich sind, wobei jedes System mit dem anderen gleich und gleichlaufend, aber gegen es verschoben ist"; (dies giebt 2 kongruente ineinandergestellte parallelogrammatische Netze, deren eines um 180° gegen das andere gedreht ist). Bei Aufsuchung regelmässiger Systeme im Raum ergeben sich zunächst die Raumgitter. Wollte man nun in einem aus Atomen aufgebauten Raumgitter innerhalb jedes Elementarparallelepipeds an entsprechende Stellen noch je ein neues Atom stellen, so würde die Regelmässigkeit verlangen, „dass die Punkte des neuen Atoms mit den übereinstimmenden Punkten eines jeden der 4 zunächststehenden Atome ebenmässig liegen in Bezug auf je einen Ebenmässigkeitspunkt, d. h. in gerade entgegengesetzter Richtung gleich weit von ihm entfernt. Dieses neue Atom ist aber dann mit den ersteren im Allgemeinen nicht zum Decken gleich, sondern nur spiegelbildlich gleich." Also ist diese Anordnung für lauter kongruente Atome im Allgemeinen nicht möglich. „Es giebt aber Fälle, in denen jene Ebenmässigkeit eines fünften Atoms gegen die 4 ersteren zugleich ein Decken in sich schliesst, nämlich dann, wenn die Formen nach verschiedenen Richtungen hin die gleiche Ausbildung haben, wie die Krystallformen der meisten Krystallsysteme. In diesem Falle ist noch ein fünftes Atom von ganz gleicher und ebenmässig zu den 4 ersten gestellter Form möglich; dasselbe erzeugt dann ein zweites, mit dem System der ersteren kongruentes und gleichlaufendes System, nur mit verschiedener Stellung der Atome." Z. B. entsteht durch senkrechte Aufschichtuug von kongruenten ebenen Anordnungen der zweiten für die Ebene gefundenen Art eine solche neue räumliche Struktur-

form (nämlich das zweizählige Säulensystem des Capitel 5, § 14 Nr. 1). Ferner entsteht aus regulären Tetraëdern, deren jedes 4 kongruente Tetraëder, Fläche gegen Fläche, aber mit verschränkten Kanten, rings um sich stehn hat, eine regelmässige Anordnung (nämlich ein Specialfall des regulären Gegenschraubensystems zweiter Art. Vgl. Cap. 7, § 26, Nr. 5.).

So war die Möglichkeit noch anderer Strukturformen ausser den Raumgittern von Wiener nachgewiesen. Doch verfolgte er die regelmässigen Anordnungen nicht weiter, so dass mit den von ihm angeführten die Mannigfaltigkeit aller überhaupt möglichen noch keineswegs erschöpft ist. Somit erwuchs für die Theorie der Krystallstruktur die Aufgabe einer systematischen Aufsuchung aller überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Die Lösung dieser Aufgabe verdankt man Herrn Camille Jordan;[1]) sie findet sich eingeschlossen in der Lösung eines allgemeineren Problems aus der Geometrie der Bewegung. Im Eingange seiner Abhandlung spricht Jordan die von ihm zu behandelnde Aufgabe auf 2 Arten aus, nämlich:

1) Alle möglichen Bewegungsgruppen zu bilden.
2) Auf alle möglichen Arten Molekularsysteme zu bilden, die in verschiedenen Lagen mit sich selbst deckbar sind;

und er weist kurz nach, dass beide Fragen durch dieselbe Untersuchung ihre Beantwortung finden. Auch fügt er hinzu, dass von dem zweiten Gesichtspunkt aus Bravais die wichtigsten Specialfälle behandelt und davon eine bemerkenswerthe Anwendung auf die Krystallographie gemacht habe. Er selbst aber löst die Aufgabe als eine Bewegungsaufgabe, ohne die Resultate in die anschaulichere Ausdrucksweise der Geometrie zu übersetzen. Daher lässt seine Untersuchung keine unmittelbare Anwendung auf die Theorie der Krystallstruktur zu. Dazu kommt, dass von den 174 von ihm ermittelten Bewegungsgruppen, — wie mich 1875 eine genaue Durcharbeitung seiner Resultate gelehrt hat,[2]) — mehr als 100 ohne

---

1) Mémoire sur les groupes de mouvements. In Brioschi e Cremona: Annali di Matematica. Ser. II. T. II. 1868/69 Milano. p. 167—215 und 322—345.

2) Die unbegrenzten regelm. Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur. Karlsruhe. Braun. 1876. (Aus den Verh.

Beziehung zu der Theorie der Krystallstruktur sind, nämlich erstens die Gruppen mit unendlich kleinen Bewegungen, weil diese kontinuirlichen Raumgebilden und nicht Systemen diskreter Punkte entsprechen, und zweitens solche Gruppen, welche Punktsystemen entsprechen, die nicht nach allen 3 Dimensionen unendlich ausgedehnt sind. Endlich aber findet sich, abgesehn von kleineren Unrichtigkeiten, auch eine merkliche Lücke in der Jordan'schen Untersuchung. (Alle Systeme des § 20, Cap. 6 fehlen bei Jordan.) Diese zu entdecken war mir dadurch gelungen, dass ich früher, ohne seine Abhandlung zu kennen, die Aufsuchung aller regelmässigen unbegrenzten Punktsysteme in der Ebene nach einer völlig anderen Methode ausgeführt hatte,[1]) wobei sich gewisse Systeme herausstellten, welche, nebst ihren analogen im Raum, bei Jordan fehlen.

Mit Benutzung des Grundgedankens der Jordan'schen Methode, aber mit Weglassung alles dessen, was nicht direkten Bezug zur Krystallstruktur hat, sind nun im Folgenden alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung abgeleitet und somit alle denkbaren Strukturformen krystallisirter Körper ermittelt. Was diese Theorie der Krystallstruktur vor der Haüy-Bravais'schen voraus hat, lässt sich im Wesentlichen in folgende 4 Punkte zusammenfassen.

Erstens ist die Ausgangshypothese von der regelmässigen Anordnung der Krystallelemente so einfach und evident, dass sie wohl von keiner Seite einem Widerspruch begegnen wird. Damit ist der den bisherigen Theorien gemachte Hauptvorwurf der Willkür beseitigt.

Zweitens ergiebt sich, dass sämmtliche Punktsysteme, auf welche diese Hypothese führt, in Gruppen zusammenfassbar sind, die vermöge ihrer Symmetriecharaktere den von der Natur dargebotenen Gruppen der Krystallsysteme entsprechen; jedoch findet sich eine viel grössere Zahl von Punktsystemen als in der Bravais'schen Theorie, und sämmtliche Strukturformen der letzteren, d. h. also sämmtliche

des naturw. Vereins zu Karlsruhe. Heft 7. 1876.) Ein Auszug davon in Poggend. Ann. d. Phys. Ergbd. VII. p. 337.

1) Die regelm. ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. In Borchardts Journ. für Mathemat. Bd. 77. p. 47—101. 1873.

Raumgitter, sind als Specialfälle unter den neuen Punktsystemen mit enthalten.

Drittens ergeben sich zahlreiche Punktsysteme von dem geometrischen Charakter der halbflächigen Krystalle, so dass es nicht, wie bei Bravais, einer Hülfshypothese bedarf, um auch diese mit zu umfassen.

Viertens werden gewisse specielle geometrische und physikalische Erscheinungen, so namentlich *die Grenzformen* und das *optische Drehvermögen*, durch die neue Theorie dem Verständniss näher gebracht.

Capitel II.

Grundlegendes.

§ 3. Hypothese.

Es ist naturgemäss, einen Krystall in regelmässiger Weise aus lauter kongruenten Grundgebilden oder Krystallelementen aufgebaut zu denken, von denen es allerdings unentschieden bleiben muss, ob sie die aus Atomen zusammengesetzten chemischen Molekeln selbst, oder Aggregate von solchen sind. Ob diese Elemente durch Zwischenräume von einander getrennt sind und sich etwa um gewisse Mittellagen bewegen, oder ob sie stetig aneinandergelagert den Raum erfüllen, kann für die folgende Untersuchung unerörtert bleiben; denn von jedem Krystallelemente wird nur der Schwerpunkt in Betracht gezogen, in welchem man sich etwa die ganze Masse koncentrirt denken mag. *Für die folgende geometrische Untersuchung ist also der Krystall durch ein System diskreter Massenpunkte ersetzt, in welchem es somit stets einen kleinsten Punktabstand giebt.*

Weil es sich ferner nur um die Ermittelung der Struktur handelt, so wird die Betrachtung der Grenzen ganz vermieden, und zwar dadurch, dass man den Krystall unendlich gross denkt (was sich übrigens wegen der Kleinheit der Molekularabstände gegenüber den endlichen Dimensionen des Krystalls auch sonst rechtfertigen lässt). — Mit Rücksicht auf die in § 1 auseinandergesetzten wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Krystalle („dass ihre Eigenschaften nur von der Richtung abhängen, und dass physikalisch ausgezeichnete

Punkte nicht vorhanden sind"), sowie mit Beachtung der eben voraufgeschickten Erwägungen, wird nun der ganzen Untersuchnng folgende Hypothese über den krystallinischen Zustand zu Grunde gelegt:

Hypothese:

Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmässige unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Massenpunkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Massenpunkt.

Oder anders ausgedrückt: Ein Krystall ist ein endliches Stück eines unendlichen regelmässigen Punktsystems.

Zu Folge dieser Hypothese ist die Ermittelung aller für die Krystalle möglichen Strukturformen auf die Lösung folgender Aufgabe zurückgeführt:

„Alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden."

Die Lösung dieser Aufgabe bildet den Inhalt der folgenden Capitel. Um zunächst den Begriff des regelmässigen unendlichen Punktsystems schärfer zu bestimmen, denke man in einer beliebigen unbegrenzten Anordnung von Punkten einen Punkt mit allen übrigen durch gerade Linien verbunden. In derselben Weise sei von jedem Punkt des Systems aus ein solches Linienbündel nach den anderen Punkten hin konstruirt; so werden diese Linienbündel im Allgemeinen von einander verschieden sein. Es sind aber Systeme denkbar, in denen die Punktvertheilung um jeden Punkt dieselbe ist wie um jeden anderen, so dass die von allen Punkten aus konstruirbaren Linienbündel untereinander kongruent sind. Hiernach hat man folgende *Erklärung:*

Ein regelmässiges Punktsystem ist ein solches, in welchem die von jedem Systempunkt nach allen übrigen Systempunkten gezogenen Linienbündel untereinander kongruent sind.

Man denke sich nun ein regelmässiges unendliches Punktsystem starr gemacht und aus seiner Lage herausgerückt; dann bilden die zuvor von Systempunkten besetzt gewesenen Orte des Raums ein dem System kongruentes Punktsystem; es möge, im Gegensatz zu dem herausgenommenen *beweglichen* System, das *feste* heissen. In welchen Systempunkt des festen Systems man nun einen beliebig gewählten System-

punkt des beweglichen auch legen mag: immer kann man in Folge der Kongruenz aller Linienbündel bewirken, dass beide Systeme zur Deckung gelangen. *Eine solche Bewegung nun, welche das bewegliche System aus einer Lage der Deckung mit dem festen in eine andere Lage der Deckung mit ihm überführt, soll eine Deckbewegung heissen.* Diese Bewegungen können theils Parallelverschiebungen, theils Drehungen oder Schraubungen um gewisse im festen System gegebene gerade Linien als Axen sein; und es wird ganz von der Eigenthümlichkeit des betreffenden Systems abhängen, welcherlei Deckbewegungen es besitzt. Ja man wird gerade nach den ihnen zukommenden Deckbewegungen verschiedene Gattungen von Punktsystemen unterscheiden können, so dass *die verschiedenen Arten von Deckbewegungen als Eintheilungsgrund für die regelmässigen Punktsysteme dienen.* Es stellt sich also heraus, dass die anzustellende Untersuchung in die Lehre von der Geometrie der Bewegung (oder Kinematik) gehört. Daher ist es nützlich, aus jener Lehre hier diejenigen Begriffe und Hauptsätze mit kurzer Andeutung der Beweise vorauszuschicken, die im Folgenden zur Anwendung kommen.

§ 4. Kinematische Hülfsbetrachtungen, betreffend starre Systeme.

a) **Erklärungen:** Diejenige Lagenänderung eines Systems, bei welcher alle seine Punkte parallele Grade von derselben Länge l und in demselben Sinne durchlaufen, heisst eine *Parallelverschiebung oder Schiebung l (Translation).*

Diejenige Lagenänderung eines Systems, bei der alle Punkte einer gewissen Geraden A ihren Ort beibehalten, alle übrigen aber Kreisbogen mit dem Centriwinkel α um jene Gerade als Axe beschreiben, heisst eine *Drehung A_α (Rotation).* Es werden immer nur Drehungen betrachtet werden, die 180^0 nicht überschreiten; nämlich eine Drehung $> 180^0$ kann stets durch eine Drehung entgegengesetzten Sinnes ersetzt werden, welche die vorige zu einer vollen Umdrehung ergänzt.

Diejenige Lagenänderung eines Systems, bei welcher alle Punkte eine gleichgrosse und gleichsinnige Drehung α um eine und dieselbe Axe A, und ausserdem eine und dieselbe Schiebung l parallel dieser Axe erleiden, heisst eine

Schraubung $A_{\alpha,l}$. Diese Bewegung umfasst die beiden vorigen als Specialfälle, da sie für $l = o$ in die Drehung A_α, dagegen für $\alpha = o$ in die Schiebung l übergeht. Die Reihenfolge der beiden einfachen Bewegungen (Drehung und Schiebung), welche eine Schraubung zusammensetzen, ist willkürlich; auch können beide gleichzeitig ausgeführt werden.

Bewegungen heissen *äquivalent*, wenn jede von ihnen das System aus der gegebenen Anfangslage in dieselbe Endlage bringt.

b) **Sätze.**

I. *Zwei nach einander ausgeführte Schiebungen parallel und gleich zweien Seiten* (AB, BC) *eines Dreiecks sind zusammen äquivalent einer Schiebung parallel und gleich der dritten Drejecksseite* AC. *Die Reihenfolge der beiden ersten Schiebungen ist vertauschbar.* (Sehr leicht zu beweisen.)

II. *Drehung* A_α *um eine zum beweglichen System gehörige Axe* A *und Schiebung* s *senkrecht zur Axe, in beliebiger Reihenfolge, sind zusammen äquivalent einer gleichen und gleichsinnigen Drehung* B_α *um eine zur ersteren parallele Axe* B, *gelegt durch den Scheitel eines auf ihr senkrechten gleichschenkligen Dreiecks, das die von einem Punkt der Axe* A *aus gezogene Schiebung* s *als Basis, und den Drehwinkel* α *als Winkel an der Spitze hat, und das auf derjenigen Seite der Basis liegt, nach welcher hin die Drehung erfolgt.* (Fig. 1 ist in einer zu den Axen senkrechten Ebene zu denken.)

Beweis. Durch Drehung A_α wird diejenige Gerade b des beweglichen Systems, die Anfangs in B lag, nach B' geführt. Die darauffolgende Schiebung s führt b wieder nach B zurück. Weil also nach Ausführung der Bewegungen alle Punkte der Geraden b ihre ursprünglichen Orte im Raum, nämlich in B, behalten haben, so sind jene 2 Bewegungen A_α und s äquivalent einer Drehung um B. Der Drehwinkel ergiebt sich so: die Axe A ist durch die Drehung A_α unverändert geblieben, darauf aber durch die Schiebung s nach A' gelangt. Also muss die äquivalente Drehung um B ebenfalls A nach A' befördern, und dies geschieht nur, wenn

Fig. 1.

der Drehwinkel $= \alpha$ ist. — Entsprechend ist der Beweis bei umgekehrter Reihenfolge der 2 gegebenen Bewegungen.

Zusatz 1. *Ist statt der Drehung A_α eine Schraubung $A_{\alpha,l}$ gegeben, so gilt der entsprechende Satz; denn durch das Hinzutreten der Schiebungskomponente l wird an dem Beweise sonst nichts geändert.*

Zusatz 2. *Ist statt der zur Axe senkrechten Schiebung s eine geneigte gegeben, so ersetzt man sie nach I. durch 2 Schiebungen, resp. senkrecht und parallel zur Axe. Für die senkrechte gilt dann Satz II. Schliesslich ist noch die der Axe parallele Schiebung auszuführen, so dass die äquivalente Bewegung eine Schraubung ist.*

III. *(Eulerscher Satz.) Zwei nacheinander auszuführende Drehungen A_α und B_β um 2 sich schneidende feste Axen des Raums sind zusammen äquivalent einer Drehung C_γ um eine durch denselben Punkt gehende dritte Axe. Um letztere zu finden, beschreibe man mit beliebigem Radius eine Kugel um den Schnittpunkt O der gegebenen Axen. Von den 2 Schnittpunkten einer jeden Axe mit der Kugelfläche kommt nur je einer, den man beliebig wählen kann, in Betracht. Nun zieht man auf der Kugelfläche 2 grösste Kreise, indem man erstens im Schnittpunkt A der ersten Axe ihren halben Drehwinkel, $\frac{\alpha}{2}$, an den durch beide Axen gehenden grössten Kreis anträgt, — und zwar auf derjenigen Seite dieses Kreises, von welcher her die Drehung erfolgt, — und zweitens im Schnittpunkt B der zweiten Axe den dieser zugehörigen halben Drehwinkel, $\frac{\beta}{2}$, jedoch auf der Seite jenes Kreises, nach welcher hin die Drehung erfolgt: dann bestimmen die Schnitte C dieser 2 grössten Kreise die Lage der gesuchten Axe, und der bei C befindliche Aussenwinkel des sphärischen Dreicks ABC ist ihr halber Drehungswinkel.* (Fig. 2.)

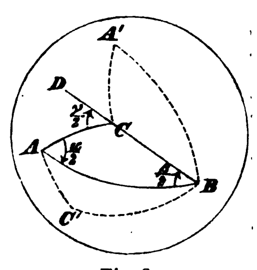


Fig. 2.

Beweis. Durch Drehung A_α wird diejenige Gerade c des beweglichen Systems, die Anfangs in OC lag, in die Lage OC' gebracht, so dass die Dreiecke $AC'B$ und ACB zueinander symmetrisch sind in Bezug auf AB. Die darauf

folgende Drehung B_β führt c wieder in die Lage OC zurück. Weil also nach Ausführung beider Bewegungen alle Punkte der Geraden c ihre ursprünglichen Orte im Raum, nämlich in OC, behalten haben, so sind jene 2 Drehungen A_α und B_β äquivalent einer Drehung um OC. Der Drehwinkel γ ergiebt sich so: Diejenige Gerade a des beweglichen Systems, die Anfangs in OA lag, ist durch die Drehung A_α unverändert geblieben, darauf aber durch die Drehung B_β in die Lage OA' gelangt, so dass die Dreiecke ABC und $A'BC$ zueinander symmetrisch sind in Bezug auf BC. Also muss die äquivalente Drehung um OC ebenfalls die Gerade a aus der Lage OA in die Lage OA' befördern; also ist um OC um den $\sphericalangle \gamma = ACA'$ zu drehen. Derselbe wird, in Folge der Symmetrie der eben genannten Dreiecke, durch den Bogen BCD halbirt. Hiermit ist die Eulersche Konstruktion bewiesen.

IV. *Zwei nacheinander auszuführende gleichsinnige Drehungen A_α und B_β um 2 parallele feste Axen des Raums sind zusammen äquivalent einer Drehung C_γ desselben Sinnes um eine parallele Axe, deren Lage und Drehwinkel wie beim vorigen Satze gefunden werden, nur dass die Konstruktion auf einer unendlich grossen Kugel, d. h. auf der Ebene ausgeführt wird.*

Beweis wie vorher; die grössten Kreise der vorigen Figur verwandeln sich hier in gerade Linien.

Zusatz. *Sind statt der Drehungen Schraubungen $A_{\alpha,l}$, $B_{\beta,m}$ um parallele Axen gegeben, so ist die äquivalente Bewegung eine Schraubung $C_{\gamma,l+m}$, deren Axe und Drehungskomponente wie vorher gefunden werden.*

V. *Ein nur um einen festen Punkt O drehbares starres System kann aus einer gegebenen Lage in jede andere mögliche Lage durch eine Drehung um eine gewisse Axe übergeführt werden. Um letztere zu finden, beschreibe man mit beliebigem Radius eine Kugel um den festen Punkt O. Zwei auf dieser Kugelfläche liegende, sonst beliebig gewählte Punkte des Systems nehmen bei seiner ersten Lage gewisse Orte des Raums ein, A und B; bei irgend einer zweiten Lage des Systems aber die Orte A' und B'. Verbindet man nun die alte und neue Lage des ersten Systempunkts durch einen grössten Kreisbogen AA', und ebenso die des zweiten, BB', und legt durch die Mitten, a und b, dieser Bögen, senkrecht zu letzteren, zwei grösste Kreise,*

so giebt ihr Schnitt C die Lage der gesuchten Drehaxe. (Fig. 3.)

Beweis. Durch Verbindung von C mit A, B, A', B' vermittelst grösster Kreise entstehen die kongruenten sphärischen Dreiecke CAB und $CA'B'$. Aus der hieraus folgenden Gleichheit der Winkel ACB und $A'CB'$, verbunden mit der identischen Gleichung $BCA' = BCA'$ (oder $ACB' = ACB'$), folgt, dass $\sphericalangle ACA' = BCB'$ ist. Dreht man also das System um die Axe OC um diesen Winkel, so kommen die ursprünglich in A und B befindlich gewesenen Punkte des Systems nach A' resp. B', und folglich ist durch diese Drehung das ganze System aus der ersten in die zweite Lage übergeführt.

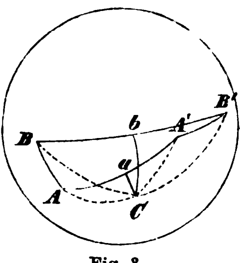


Fig. 3.

Zusatz. Die angegebene Construktion wird vereitelt, wenn die beiden grössten Kreise, deren Schnitt die Axe OC bestimmen soll, sich gar nicht schneiden, sondern zusammenfallen. Dies kann nur eintreten, wenn entweder die Bögen AB und $A'B'$ selbst (Fig. 4), oder ihre Ergänzungen zum Vollkreis (Fig. 5), sich so schneiden, dass die durch den

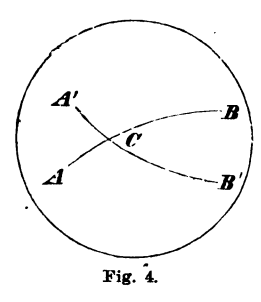


Fig. 4.

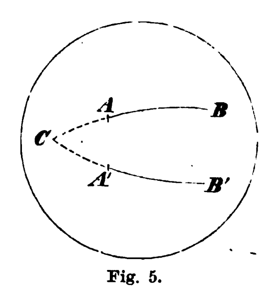


Fig. 5.

Schnittpunkt bestimmten Stücke des einen Bogens kongruent sind den entsprechenden Stücken des anderen. In diesen Fällen sieht man aber unmittelbar, dass dieser Schnittpunkt C selbst die Lage der gesuchten Axe angiebt.

VI. *(Châsles'scher Satz.) Ein starres System kann aus jeder gegebenen Anfangslage in jede beliebige Endlage durch eine Schraubung übergeführt werden.*

Beweis. Bezeichnen P und P' diejenigen 2 Orte des

Raums, welche ein und derselbe beliebig gewählte Systempunkt in der Anfangs- und Endlage des Systems einnimmt, so lässt sich die Ueberführung des Systems so bewirken, dass man ihm erst die Schiebung PP' ertheilt, wodurch dieser eine Systempunkt schon seinen schliesslichen Ort erreicht, und dass man es dann noch eine einzige, nach dem vorigen Satz bestimmte, Drehung um P' machen lässt. Statt dieser Bewegungen wende man nun aber folgende an: Die Schiebung PP' wird nach Satz I. durch 2 aufeinander senkrechte Schiebungen ersetzt, deren eine parallel der Axe der nachher nöthigen Drehung gewählt wird. Die andere, zur Drehungsaxe senkrechte, Schiebung und die darauf folgende Drehung sind nach Satz II zusammen äquivalent einer gleichen und gleichsinnigen Drehung um eine gewisse, zur vorigen parallele Axe. Also sind im Ganzen nur 2 einfache Bewegungen zur Ueberführung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage nöthig: eine Schiebung parallel einer gewissen Axe, und eine Drehung um diese Axe. Sie bilden zusammen die behauptete Schraubung.

VII. *Zwei nacheinander auszuführende Schraubungen $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$ um 2 im Raum feste, nicht parallele Axen sind äquivalent einer einzigen Schraubung, deren Drehungskomponente und Axenrichtung (aber nicht absolute Lage) dieselben sind, als wenn statt der Schraubungen 2 Drehungen mit denselben Drehwinkeln und um ebenso gerichtete, aber sich schneidende Axen nacheinander hätten ausgeführt werden sollen.*

Beweis. Weil die Reihenfolge der beiden einfachen Bewegungen, welche eine Schraubung zusammensetzen, beliebig ist, so sind die nacheinander auszuführenden 2 gegebenen Schraubungen äquivalent folgender Reihenfolge von Bewegungen:

$$l, \; A_\alpha, \; B_\beta, \; m.$$

Die Drehung B_β ist nach Satz II äquivalent der gleichen und gleichsinnigen Drehung um eine zu B parallele Axe B' (die man so wählt, dass sie A schneidet), verbunden mit einer darauf folgenden, zur Axe B' senkrechten, Schiebung n. Die 2 Drehungen A_α und B'_β um die sich schneidenden Axen setzen sich nach Satz III zu einer Drehung C_γ um eine bestimmte neue Axe C zusammen. [Von dieser Drehung C_γ

wird behauptet, dass die resultirende Schraubung mit ihr die Axenrichtung und den Drehwinkel gemein habe.] Die Schiebungen n und m setzen sich nach Satz I zu einer Schiebung l' zusammen. Mit den 2 gegebenen Schraubungen sind also nun folgende Bewegungen äquivalent:

$$l, C_\gamma, l';$$

oder, wenn man jede der 2 Schiebungen l und l' nach Satz I in 2 Komponenten zerlegt, eine (λ resp. λ') parallel zur Axe C, die andere (σ resp. σ') senkrecht dazu, so hat man folgende Reihe von Bewegungen:

$$\lambda, \sigma, C_\gamma, \sigma', \lambda'.$$

Nun sind aber σ und C_γ zusammen äquivalent einer Drehung C'_γ um eine zu C parallele Axe C' (Satz II), und nach demselben Satze sind C'_γ und σ' zusammen äquivalent einer Drehung C''_γ um eine ebenfalls zu C parallele Axe C''. Folglich ist mit den 2 gegebenen Schraubungen äquivalent folgende Reihe von Bewegungen:

$$\lambda, C''_\gamma, \lambda'.$$

Da nun die Schiebungen λ und λ' beide parallel der Axe C'' sind, um welche die Drehung γ auszuführen ist, so ist das Gesammtergebniss eine Schraubung mit der Drehungkomponente γ um Axe C'', deren Richtung mit der von C übereinstimmt; und das war zu beweisen.

VIII. *Wenn die nacheinander auszuführenden Bewegungen $A_{\alpha,l}$ und $B_{\beta,m}$ zusammen äquivalent sind mit $C_{\gamma,n}$, so ist die umgekehrte Bewegung $C_{-\gamma,-n}$ äquivalent mit den in umgekehrter Reihenfolge auszuführenden umgekehrten beiden anderen Bewegungen, d. h. mit $B_{-\beta,-m}$, $A_{-\alpha,-l}$.*

Beweis selbstverständlich.

IX. *Wenn von 3 Bewegungen, von welchen die eine $C_{\gamma,n}$ den beiden anderen, $A_{\alpha,l}$ und $B_{\beta,m}$, zusammen äquivalent ist, zwei zu den Deckbewegungen eines unendlichen regelmässigen Punktsystems gehören, so ist auch die dritte eine Deckbewegung des Systems.*

Beweis. Als Deckbewegungen des Punktsystems können gegeben sein *entweder* $A_{\alpha,l}$ und $B_{\beta,m}$, *oder* $A_{\alpha,l}$ und $C_{\gamma,n}$, *oder* $B_{\beta,m}$ und $C_{\gamma,n}$. — Im *ersten* Fall herrscht nach Ausführung der beiden Bewegungen $A_{\alpha,l}$ und $B_{\beta,m}$ wieder Deckung

des beweglichen und festen Systems (vergl. Seite 28), folglich ist auch die jenen beiden Bewegungen zusammen äquivalente Bewegung $C_{\gamma, n}$ eine Deckbewegung des Systems. — Im *zweiten* Fall herrscht nach Ausführung der Bewegung $C_{\gamma, n}$ Deckung. Statt dieser einen Deckbewegung wende man nun die ihr äquivalenten Bewegungen $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$ nacheinander an. Nach Ausführung von $A_{\alpha, l}$ herrscht nach Voraussetzung Deckung. Führt man darauf die Bewegung $B_{\beta, m}$ aus, so muss wieder Deckung herrschen, weil jetzt dieselbe Lage herbeigeführt ist, wie durch die eine Bewegung $C_{\gamma, n}$, welche ja eine Deckbewegung ist. Also ist auch $B_{\beta, m}$ eine solche. — Im *dritten* Fall herrscht nach Ausführung der Bewegung $C_{\gamma, n}$ Deckung, folglich auch nach Ausführung der entgegengesetzten $C_{-\gamma, -n}$. Statt letzterer Bewegung wende man nacheinander die Bewegungen $B_{-\beta, -m}$, $A_{-\alpha, -l}$ an, die mit $C_{-\gamma, -n}$ äquivalent sind (Satz VIII). Nach Ausführung von $B_{-\beta, -m}$ herrscht nach Voraussetzung Deckung. Führt man dann noch die Bewegung $A_{-\alpha, -l}$ aus, so muss wieder Deckung herrschen, weil jetzt dasselbe erreicht ist, wie bei Ausführung der einen Bewegung $C_{-\gamma, -n}$. Also ist $A_{-\alpha, -}$ eine Deckbewegung; also auch $A_{\alpha, l}$.

Capitel III.

Die verschiedenen möglichen Arten und Richtungen von Axen in regelmässigen unendlichen Punktsystemen.

§ 5. Die verschiedenen möglichen Axenarten.

Erklärung. *Unter einer „Axe eines regelmässigen unendlichen Punktsystems" oder „Axe" schlechtweg wird die Axe einer Deckbewegung (Schraubung oder Drehung) des Systems verstanden.* Im Allgemeinen bedeutet sie also die Axe einer Schraubung $A_{\alpha, l}$, deren Schiebungskomponente l aber auch $= o$ sein kann.

Alle regelmässigen unendlichen Punktsysteme zerfallen in solche mit Axen und in solche ohne Axen; auf letztere wird erst im Abschnitt II, Cap. IV, eingegangen; zunächst werden nur Punktsysteme mit Axen untersucht.

Erklärung. *Zwei Axen eines Systems heissen gleich, wenn die Anordnung der Systempunkte um die eine von ihnen dieselbe ist, wie um die andere.* Alsdann muss sich die eine Axe, zum beweglichen System gehörig gedacht, mit der anderen zum festen System gehörig gedachten Axe zur Deckung bringen lassen, so dass zugleich alle Punkte des beweglichen und festen Systems sich decken.

Satz 1. *Wenn ein regelmässiges unendliches Punktsystem überhaupt eine Axe besitzt, so besitzt es zugleich unendlich viele ihr gleiche Axen.*

Dies folgt unmittelbar aus der Regelmässigkeit und Unendlichkeit des Systems.

Satz 2. *Unter den gleichen Axen giebt es entweder parallele, oder solche, deren Richtungen einen unendlich kleinen Winkel einschliessen* (d. h. wie klein man sich auch den Winkel von 2 Axen von dieser Art denken mag: immer giebt es 2 ihnen gleiche Axen, deren Richtungen einen noch kleineren Winkel einschliessen).

Beweis. Es sind nur 2 Fälle denkbar: entweder verlaufen die gleichen Axen nach einer endlichen Anzahl von Richtungen, oder nach einer unendlichen. Im ersteren Falle müssen jedenfalls parallele gleiche Axen vorhanden sein, denn sonst könnte die Anzahl aller gleichen nicht unendlich gross sein (Satz 1). Im anderen Falle müssen sicher gleiche Axen von unendlich wenig verschiedener Richtung vorkommen; denn sonst könnte die Zahl der Richtungen von solchen Axen nicht unendlich gross sein.

Satz 3. *Zwei gleiche parallele oder unendlich wenig verschieden gerichtete Axen (A', A'') können nicht einen unendlich kleinen Abstand haben (oder sich sogar schneiden).*

Beweis. Angenommen die beiden gleichen Axen von unendlich wenig verschiedener oder sogar gleicher Richtung hätten einen unendlich kleinen Abstand (oder schnitten sich sogar). Dann wird irgend ein Systempunkt m durch die Bewegung $A'_{\alpha, l}$ nach m', dagegen durch die Bewegung $A''_{\alpha, l}$ nach m'' versetzt. Also müssen m' und m'' Punkte des festen Systems sein, denn jene Bewegungen sind ja Deckbewegungen; und wegen der über A' und A'' gemachten Voraussetzungen muss der Abstand $\overline{m'm''}$ unendlich klein sein; folglich wäre

er kleiner als der für das System angebbare kleinste Punktabstand (vgl. Seite 27), der ja von bestimmter endlicher Grösse ist. Also ist die angenommene Lage der beiden Axen unmöglich, und daher der Satz bewiesen.

Satz 4. *Axen mit unendlich kleinem Drehwinkel* α *sind unmöglich.*

Beweis. Unter allen gleichen Axen wähle man zwei solche aus ($A_{\alpha,l}$ und $A'_{\alpha,l}$), deren Richtungen entweder gar nicht oder unendlich wenig verschieden sind, was nach Satz 2 stets möglich ist. Durch die Ausführung der Bewegung $A_{\alpha,l}$ gelangt die Axe A' in eine neue Lage A'', die folglich auch eine gleiche Axe des festen Systems ist. Wäre nun α ein unendlich kleiner Winkel, so würden A' und A'' zwei Axen von unendlich wenig oder gar nicht verschiedener Richtung sein, die einen unendlich kleinen Abstand hätten (oder sich schnitten). Dies ist nach Satz 3 unmöglich, also der Satz bewiesen.

Anmerkung. Nur im Falle einer unendlich grossen Schiebungskomponente l würden A' und A'' keinen unendlich kleinen Abstand zu haben brauchen. Dieser Fall ist aber ausgeschlossen; denn eine Schraubung mit unendlich grosser Schiebungskomponente ist gar keine *bestimmte* und *wirklich ausführbare* Bewegung; daher hätte es keinen Sinn, eine solche Bewegung als eine ein Punktsystem charakterisirende Deckbewegung zulassen zu wollen.

Satz 5. *Gleiche Axen, deren Richtungen einen unendlich kleinen (jedoch von o verschiedenen) Winkel einschliessen, sind unmöglich* (Fig. 6).

Beweis. Zunächst seien A und A' zwei *parallele* gleiche Axen. Die Figur ist in einer zu ihnen senkrechten Ebene zu denken, deren Schnittpunkte mit den Axen durch dieselben Buchstaben wie die Axen bezeichnet sind. Die Bewegung $A_{\alpha,l}$ führt A' in die Lage a', und die Linien $\overrightarrow{AA'}$ der Zeichnungsebene in eine zu $\overrightarrow{Aa'}$ parallele Lage. Dagegen wird aus derselben Anfangslage durch die Bewegung $A'_{\alpha,l}$ die Axe A in die Lage a geführt, und die Linie $\overrightarrow{AA'}$ in eine zu $\overrightarrow{aA'}$ parallele Lage, welche gleichfalls zu Aa' parallel ist. Die beiden, durch die erste und die zweite Bewegung erreich-

baren, Endlagen des Systems sind einander parallel, weil die Lagen, in welche die Axe A und die Linie $\overrightarrow{AA'}$ durch die erstere Bewegung gelangen, gleichsinnig parallel sind den Lagen, in die sie durch die zweite gelangen. Folglich kann das System aus der einen Endlage in die andere durch eine einfache Schiebung übergeführt werden. Diese ist daher eine Deckbewegung für das Punktsystem.

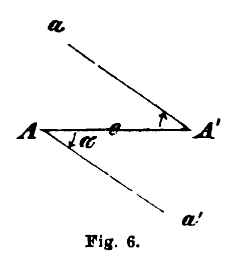


Fig. 6.

Jetzt seien aber die beiden gleichen Axen A und A' unendlich wenig verschieden gerichtet; ihr kürzester Abstand sei e. Dann kommt das System durch Ausführung der einen, resp. anderen der Bewegungen $A_{\alpha, t}$ und $A'_{\alpha, t}$ in zwei nicht mehr völlig parallele Lagen, indem sowohl die Axenrichtungen A und a, als die Richtungen der Linien, in welche der kleinste Abstand e geführt wird, unendlich wenig von einander abweichen. Jetzt kann also das System aus der einen Endlage in die andere nicht mehr durch eine Schiebung übergeführt werden; vielmehr ist dazu nach Hülfssatz VI eine Schraubung erforderlich. Dieselbe kann aber nur eine unendlich kleine Drehungskomponente haben, weil die Drehung, die das System in der einen Lage erleiden müsste, um der anderen völlig parallel zu werden, nur unendlich klein ist, und weil diese Drehung mit der Drehungskomponente jener Schraubung übereinstimmt, wie aus dem Beweise von Hülfssatz VI hervorgeht. Hiernach wäre also eine Schraubung mit unendlich kleiner Drehungskomponente eine Deckbewegung des Systems. Das ist aber nach Satz 4 unmöglich; also können gleiche Axen von unendlich wenig verschiedener Richtung nicht vorkommen.

Satz 6. *Unter den gleichen Axen giebt es nothwendig parallele.*

Beweis. Nach Satz 2 giebt es unter den gleichen Axen entweder parallele, oder solche, deren Richtungen einen unendlich kleinen Winkel einschliessen. Weil nun der letztere Fall in Satz 5 als unmöglich nachgewiesen ist, bleibt nur der erstere übrig.

Satz 7. *Der kleinste zu einer Axe gehörige Drehwinkel α ist ein aliquoter Theil der vollen Umdrehung, d. h.:*

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \text{ (}n = \textit{ganze Zahl}\text{) (Fig. 7).}$$

Beweis. Zunächst ist klar, dass überhaupt für jede Axe ein kleinster Drehwinkel α angebbar ist, denn Axen mit unendlich kleinen Drehwinkeln sind nach Satz 4 unmöglich. — Nun werden unter allen gleichen Axen irgend 2 parallele herausgegriffen, A und A', was nach Satz 6 stets möglich ist. Einmalige Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, t}$ bringt die Axe A' in die Lage A'', so dass in der auf den Axen senkrechten Zeichnungsebene $\sphericalangle A''AA' = \alpha$. In A'' muss sich also eine gleiche Axe des festen Systems befinden. Durch nochmalige Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, t}$ geht aus A'' eine gleiche Axe A''' hervor, die in dem festen System vorhanden sein muss; u. s. f. Durch hinreichend häufige (n — 1malige) Wiederholung dieser Bewegung ergiebt sich schliesslich die Existenz einer Axe $A^{(n)}$, die so liegt, dass sie durch nochmalige Bewegung $A_{\alpha, t}$ in die Gerade geführt wird, in der von vornherein A' lag, so dass also $\sphericalangle A^{(n)}AA' = \alpha$. Wäre nämlich $\sphericalangle A^{(n)}AA' > \alpha$, so hätte man nur noch nicht oft genug die Bewegung $A_{\alpha, t}$ ausgeführt. Wäre aber $\sphericalangle A^{(n)}AA' < \alpha$, so würde eine nochmalige Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, t}$ die Existenz einer Axe $A^{(n+1)}$ liefern, welche zwischen A' und A'' hineinfiele, so dass $\sphericalangle A^{(n+1)}AA'$ $(= \omega) < \alpha$ wäre. Dann wäre also $A_{2\pi+\omega, nt}$ oder, was damit identisch ist, $A_{\omega, nt}$ eine Deckbewegung des Systems, wo $\omega < \alpha$. Somit wäre nicht α, sondern ω, der kleinste zu A gehörige Drehwinkel, und das ist gegen die Voraussetzung. Folglich ist

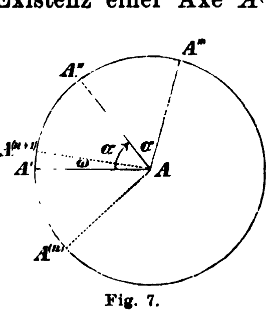


Fig. 7.

$$n\alpha = 2\pi \text{ (}n = \text{ganze Zahl).}$$

Erklärung. *Eine Axe, deren kleinster zugehöriger Drehwinkel* $= \frac{2\pi}{n}$ *ist, heisse n-zählig.* (Führt z. B. keine kleinere Drehung, als die um $1 R \sphericalangle$, Deckung des beweglichen und festen Systems herbei, so ist die zugehörige Axe vierzählig.)

Erklärung. *Charakteristische Deckbewegung um eine n-zählige Axe ist diejenige Deckschraubung, deren Drehungskompo-*

nente $= \frac{2\pi}{n}$, *und deren Schiebungskomponente gleich der kleinsten unter allen Schiebungen ist, die, mit jener Drehung verknüpft, Deckung herbeiführen.*

Satz 8. *Die ganze Zahl n, welche eine n-zählige Axe charakterisirt, kann nicht grösser als 6 sein* (Fig. 8).

Beweis. Unter allen gleichen parallelen Axen seien A und A' zwei solche, dass kein anderes Paar derselben Art einen geringeren Abstand habe als dieses; er heisse a. Durch Ausführung der Bewegung $A_{\alpha,t}$ wird A' nach A'' versetzt, wo also eine gleiche Axe des festen Systems liegen muss. Wenn $n = 6$ ist, so ist der Abstand dieser 2 Axen $\overline{A'A''} = a$; wenn aber $n > 6$, also $\alpha < 60^0$ wäre, so würde der Abstand $\overline{A'A''} < a$ sein, während doch a als kleinster vorausgesetzt war. Also kann n höchstens $= 6$ sein.

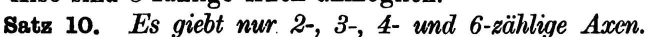
Fig. 8.

Satz 9. *Fünfzählige Axen sind unmöglich* (Fig. 9).

Beweis. Angenommen es gäbe 5-zählige Axen, so muss es darunter parallele geben; unter letzteren seien A und A' 2 nächstbenachbarte. Einmalige Bewegung $A_{\frac{2\pi}{5},t}$ bringt A' in die Lage A'', wo also eine gleiche Axe des festen Systems liegen muss. Einmalige Bewegung $A''_{\frac{2\pi}{5},t}$ bringt A in die Lage A''', wo also ebenfalls eine gleiche Axe des festen Systems liegen muss. Letztere Axe liegt aber an A' näher als A, und das ist unmöglich, weil A und A' zwei nächste sein sollten. Also sind 5-zählige Axen unmöglich.

Fig. 9.

Satz 10. *Es giebt nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Axen.*



Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den 3 vorhergehenden Sätzen, indem die Annahme eines dieser Werthe für n nicht auf irgend welchen Widerspruch führt.

§ 6. Die verschiedenen möglichen Richtungen von gleichen Axen.

Von regelmässigen unendlichen Punktsystemen *mit* n-zähligen Axen sind 2 Hauptarten denkbar:

1) Solche, bei denen die gleichen n-zähligen Axen nur nach *einer* Richtung verlaufen.

2) Solche, bei denen sie nach mehreren Richtungen verlaufen. Nur von den letzteren wird in diesem § gehandelt.

Satz 11. *Aus dem Vorhandensein von 2 gleichen n-zähligen Axen von verschiedener Richtung folgt das Vorhandensein von p solchen Axen, gerichtet wie die Kugelradien nach den Ecken eines (nicht sternförmigen) regulären sphärischen p-ecks* (Fig. 10).

Beweis. Unter allen gleichen n-zähligen Axen des Systems seien A', A'' 2 derartige, dass kein anderes Paar solcher Axen einen kleineren Winkel bestimme als jene; dieser Winkel heisse σ. Man ziehe nun im beweglichen System durch einen beliebigen Punkt der Axe A'' eine Gerade $a_1 \parallel A'$. Eine n-zählige Drehung um A'' bringt a_1 in die neue Lage a_3; parallel hiermit ist jene Lage, in welche die Axe A' des beweglichen Systems geführt ist. Wenn die A Schraubenaxen sind, so ist nun noch die zugehörige Schiebung l längs A'' auszuführen, wodurch natürlich die *Richtung* von a_3 nicht geändert wird. a_3 giebt also die *Richtung* derjenigen Axe an, welche aus A' hervorgeht durch Ausführung der Deckbewegung um A'', und welche demnach eine Axe des festen Systems sein muss; sie heisse A'''.

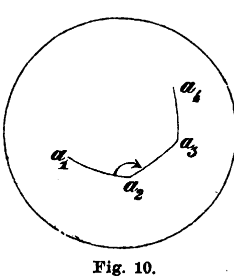


Fig. 10.

Jetzt lege man durch einen festen Punkt O eines anderen Raumes Parallelen mit den eben behandelten Axenrichtungen a_1, a_2 (identisch mit A_2) und a_3, und konstruire mit beliebigem Radius eine Hülfskugel um O, welche von jenen durch O gelegten Axenrichtungen in den gleichnamigen Punkten a_1, a_2, a_3 geschnitten werde. Dann ist auf der Kugel

$$\text{Bogen } \widehat{a_1 a_2} = \widehat{a_2 a_3} = \sigma, \text{ und}$$

$$\sphericalangle\, a_1 a_2 a_3 = \frac{2\pi}{n}.$$

Ebenso wie durch Ausführung der Deckbewegung um A'' die Axe A''' aus A' hervorging, leitet man nun durch Ausführung der Deckbewegung um A''' eine neue Axe A^{IV} aus A'' ab; ihre Richtung ist dadurch bestimmt, dass die $\parallel$

zu ihr durch O gelegte Gerade die Hülfskugel in einem Punkt a_4 treffen muss, der so liegt, dass $\widehat{a_3 a_4} = \sigma$ und $\sphericalangle\, a_2 a_3 a_4 = \frac{2\pi}{n}$ ist. — So fortfahrend findet man lauter Axenrichtungen, die in dem Punktsystem vorkommen müssen. Dadurch erhält man auf der Hülfskugel ein reguläres sphärisches Vieleck, welches sich unmittelbar schliessen muss und nicht sternförmig sein kann, weil im letzteren Falle zwei Richtungen a vorkommen würden, die einen kleineren Winkel als σ bildeten, was gegen die Voraussetzung ist. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Satz 12. *Als solche reguläre sphärische Vielecke, durch welche nach dem vorigen Satz die verschiedenen Richtungen gleicher n-zähliger Axen bestimmt werden, treten nur einige, ganz bestimmte, auf. Welche es sind, ergiebt sich im Verlauf des Beweises.*

Beweis. Der Flächeninhalt eines sphärischen p-ecks mit den (in Graden gemessenen) Winkeln α, β, γ, ... ist bekanntlich

$$= \left\{ \alpha + \beta + \gamma + \cdots - (p-2) \,.\, 180^0 \right\} \cdot \frac{r^2 \,.\, \pi}{180^0},$$

wo r den Kugelradius bedeutet. — Beim *regulären* sphärischen p-eck ist die Summe aller Winkel $= p \,.\, \alpha$, wenn α der Polygonwinkel ist; als Winkel einer n-zähligen Axe ist dieser, in Graden gemessen, $= \frac{360^0}{n}$. Also ist der Flächeninhalt des *regulären* sphärischen p-ecks

$$\begin{aligned} F_p &= \left\{ p \cdot \frac{360}{n} - (p-2) \,.\, 180 \right\} \cdot \frac{r^2 \,.\, \pi}{180} \\ &= \left\{ 2n - p\,(n-2) \right\} \cdot \frac{r^2 \,.\, \pi}{n}. \\ &= \quad \varphi \cdot \frac{K}{4n}, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung $2n - p\,(n-2) = \varphi$, und der Inhalt der Kugelfläche $4r^2\pi = K$ gesetzt ist. Aus der Ueberlegung, dass der Flächeninhalt F_p nothwendig positiv sein muss, ergiebt sich eine Bedingung für die allein möglichen Werthe von p; nämlich es muss $\varphi = 2n - p\,(n-2) > O$ sein.

Indem man nun für n nacheinander die nach Satz 10 allein möglichen Werthe 6, 4, 3, 2 einsetzt, und jedesmal

ermittelt, welche ganzzahligen Werthe von p den Ausdruck $\varphi > 0$ machen, findet man die Eckenzahlen p der allein hier auftretenden Vielecke. Dabei ist der Werth $p = 1$ ausgeschlossen, weil ein Eineck sinnlos ist. Und ausserdem ist zu bemerken, dass für $p = 2$ φ unabhängig von n, nämlich $= 4$, also $F_2 = \frac{K}{n}$ wird. Demnach ist *für Axen von jeder Zähligkeit (n) das Verlaufen nach 2 entgegengesetzten Richtungen, nämlich nach den Ecken des sphärischen Zweiecks* ($p = 2$), *möglich.*

a) *Für* $n = 6$ wird $\varphi = 4 \,.\, (3 - p)$. Es giebt nur den einzigen Werth $p = 2$, der $\varphi > 0$ macht; also ist nur das (reguläre) sphärische Zweieck möglich; sein Flächeninhalt ist $F_2 = \frac{K}{6}$. *„Sechszählige gleiche Axen von verschiedener Richtung können nur nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen."*

b) *Für* $n = 4$ wird $\varphi = 2 \,.\, (4 - p)$; dies wird positiv für $p = 2$ und für $p = 3$. Im ersteren Falle wird $F_2 = \frac{K}{4}$; im letzteren $F_3 = \frac{K}{8}$; dies ist also dasjenige reguläre sphärische Dreieck, welches das reguläre Oktaëder bestimmt. Also: *„Vierzählige gleiche Axen von verschiedener Richtung können entweder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, oder parallel den Kugelradien nach den Ecken des regulären sphärischen Dreiecks, welches das Oktaëder bestimmt."*

c) *Für* $n = 3$ wird $\varphi = 6 - p$; dies wird positiv für $p = 2, 3, 4, 5$. Die Flächeninhalte dieser Polygone sind bezüglich $F_2 = \frac{K}{3}$, $F_3 = \frac{K}{4}$, $F_4 = \frac{K}{6}$, $F_5 = \frac{K}{12}$. Also: *„Dreizählige gleiche Axen von verschiedener Richtung verlaufen entweder nach 2 entgegengesetzten Richtungen, oder parallel den Kugelradien nach den Ecken eines gewissen regulären sphärischen Dreiecks oder Vierecks oder Fünfecks, welche bezüglich das reguläre Tetraëder, Hexaëder, Dodekaëder bestimmen."*

d) *Für* $n = 2$ wird $\varphi = 4$, also unabhängig von p, und F_p wird $= \frac{K}{2}$. Die Seitenzahl p des Polygons bleibt hier also zunächst unbestimmt; aber aus dem Flächeninhalt des Polygons erkennt man, dass alle seine Ecken in ein und denselben grössten Kreis fallen. Also: *„Zweizählige gleiche*

Axen von verschiedener Richtung verlaufen entweder nach 2 entgegengesetzten Richtungen oder parallel den Radien nach den Ecken eines regulären ebenen Polygons, dessen Eckenzahl vorläufig noch unbestimmt bleibt.“

Satz 13. *Aus dem Vorhandensein von 2 gleichen 4-zähligen, oder 2 gleichen 3-zähligen Axen von verschiedener, jedoch nicht entgegengesetzter, Richtung folgt das Vorhandensein von noch mehreren gleichen Axen parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Polyeders. Letzteres ist für die 4-zähligen Axen ein Oktaëder, für die 3-zähligen ein Tetraëder oder Würfel oder Dodekaëder (doch wird das Dodekaëder später — Satz 19 — ausgeschlossen).*

Beweis. Es seien A', A'' zwei gleiche, n-zählige Axen von der Art, dass kein anderes Paar solcher Axen einen kleineren Winkel als sie einschliesse; er heisse σ. Weil die Axen nicht entgegengesetzt gerichtet sein sollen, so ist sicher $\sigma < 180^0$. Dann ist in Satz 11 bewiesen, dass noch mehrere ihnen gleiche Axen A''', A^{IV}, .. $A^{(p)}$ vorhanden sein müssen, parallel den Kugelradien nach den Ecken eines regulären sphärischen p-ecks, das, wegen $\sigma < 180^0$, kein Zweieck sein kann. Durch irgend einen Punkt einer dieser Axen (A') legt man im beweglichen System Parallelen zu den anderen genannten Axen und führt nun die Deckbewegung um A' aus. Diejenigen Linien, in welche hierdurch die gezogenen Parallelen versetzt werden, sind dann parallel zu den Lagen, in welche die anderen Axen A'', A''', ... geführt sind, und welche, — weil es eine Deckbewegung war, — Axen des festen Systems sein müssen. Zieht man, wie bei Satz 11, durch einen festen Punkt O eines anderen Raums Parallelen zu den Axenrichtungen A', A'', ... $A^{(p)}$, so bestimmen ihre Schnittpunkte $a_1, a_2, \ldots a_p$ mit der um O konstruirten Hülfskugel das reguläre sphärische p-eck des Satzes 11. Eine n-zählige Drehung der Kugel um die Linie Oa_1 führt nun das sphärische p-eck in eine neue Lage des Raums, in welcher es mit *einer* Seite an der früheren anliegt; die Radien nach den Ecken dieses neuen Polygons sind parallel den oben ermittelten neuen Axenrichtungen, die in dem Punktsystem nothwendig vorkommen müssen. Durch n-zählige Drehung der Kugel um irgend einen Radius, der einer der bisher konstruirten Axenrichtungen parallel ist, werden die

bisher vorhandenen sphärischen p-ecke in neue Lagen geführt, und wieder müssen die Radien nach ihren Ecken ‖ zu n-zähligen gleichen Axen des Systems sein. Fährt man so fort, so gelangt man doch nur zu einer beschränkten Zahl von Axenrichtungen, denn alle hier auftretenden sphärischen Polygone haben die Eigenschaft, durch wiederholte Aneinanderfügung die Kugelfläche grade lückenlos zu schliessen. Nämlich nach Satz 12 hat das sphärische Dreieck, welches bei 4-zähligen Axen auftritt, die Grösse $\frac{K}{8}$; es führt also zum Oktaëder; das sphärische Dreieck, Viereck, Fünfeck, welche bei 3-zähligen Axen auftreten, sind bezüglich $= \frac{K}{4}, \frac{K}{6}, \frac{K}{12}$, führen also zum Tetraëder, Würfel und Dodekaëder; und das war zu beweisen. —

Zusammenfassung der Ergebnisse von Satz 11 bis 13. Gleiche Axen *von jeder Zähligkeit* (n) können nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Für *sechszählige* gleiche Axen sind dies die einzig möglichen verschiedenen Richtungen. *Vierzählige* gleiche Axen können ausserdem noch parallel den Radien nach den Ecken eines Oktaëders verlaufen. *Dreizählige* gleiche Axen können noch parallel den Radien nach den Ecken eines Tetraëders oder eines Würfels oder eines Dodekaëders verlaufen; doch wird das Dodekaëder später (Satz 19) ausgeschlossen. *Zweizählige* gleiche Axen können noch parallel den Radien nach den Ecken eines regulären ebenen Polygons verlaufen. Wieviel Ecken dies Polygon hat, und ob es etwa gleichzeitig in mehreren Lagen vorkommen kann, lässt sich erst an späterer Stelle entscheiden. (Vergl. Satz 18.)

Satz 14. *Andere als die bisher gefundenen Richtungen sind für gleiche n-zählige Axen (abgesehen von den 2-zähligen) nicht möglich.*

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass parallel dem Radius nach dem Mittelpunkt eines der in Satz 12 gefundenen regulären sphärischen Polygone keine gleiche Axe verlaufen kann. Zu dem Zweck vergleicht man den zwischen einer Ecke und dem Mittelpunkt des sphärischen Polygons gelegten Bogen ϱ mit der Polygonseite σ. Sobald sich dabei $\varrho < \sigma$ herausstellt, kann nach dem Mittelpunkt keine gleiche Axe ver-

laufen, weil σ der kleinste Winkel zweier gleichen n-zähligen Axen ist. (Vergl. den Beweis zu Satz 11.)

Zur Erlangung der Zahlenwerthe von ϱ und σ bei den sphärischen Polygonen, die den 4 in Betracht kommenden regulären Polyedern zugehören, kann man so verfahren: Bezeichnet R den Radius der um das Polyeder beschriebenen Kugel, welche mit der bisher benutzten Construktionskugel identisch ist, und r den Radius der einbeschriebenen Kugel, so bestimmt ein nach einer Polyederecke verlaufender Radius R, und der nach einer benachbarten Polyederflächenmitte gezogene Radius r zusammen ein rechtwinkliges Dreieck, aus welchem folgt $\cos\varrho = \frac{r}{R}$. Ferner bilden die nach 2 benachbarten Polyederecken gezogenen Radien R und die Polyederkante a ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel σ an der Spitze, so dass $\sin\frac{\sigma}{2} = \frac{a}{2R}$. Weil ϱ und $\frac{\sigma}{2}$ rechtwinkligen Dreiecken angehören, so sind es spitze Winkel; und daher bestimmen sie sich eindeutig aus diesen Formeln, sobald man darin die durch die Kante a ausgedrückten Werthe für R und r eingesetzt hat. Diese Bestimmung ist in folgender Tabelle übersichtlich zusammengestellt.

	Dreieck des Tetraëders.	Dreieck des Oktaëders.	Viereck des Würfels.	Fünfeck des Dodekaëders.
R	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{4}\sqrt{3}\,.\,(1+\sqrt{5})$
r	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{20}\sqrt{10\,.\,(25+11\sqrt{5})}$
$\cos\varrho = \frac{r}{R}$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}$
$\sin\frac{\sigma}{2} = \frac{a}{2R}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{6}\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{5}-1)$
ϱ	70° 31′ 43,6″	54° 44′ 8,2″	54° 44′ 8,2″	37° 22′ 38,5″
σ	109° 28′ 16,4″	90°	70° 31′ 43,6″	41° 48′ 37,2″

Ferner ist beim *Zweieck* $\varrho = \frac{\sigma}{2}$. Also erkennt man, dass unter allen Umständen $\varrho < \sigma$ ist. Folglich kann parallel dem Radius nach dem Mittelpunkt eines der sphärischen Polygone keine gleiche Axe verlaufen wie nach den Ecken. Nach einem anderen Punkte der Polygonfläche kann eine solche

Axe erst recht nicht gerichtet sein, weil jeder andere Flächenpunkt mindestens einer Ecke noch näher liegt als der Mittelpunkt, so dass der Winkel des nach ihm gerichteten Radius mit dem nach einer Polyederecke gezogenen erst recht $< \sigma$ wird. —

Dagegen braucht, wenn zweizählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Ecken eines *ebenen* Polygons (d. h. eines sphärischen, das mit einem grössten Kreise zusammenfällt, Satz 12d) gerichtet sind, ϱ nicht kleiner als σ zu sein. Hier sind also noch andere Richtungen gleicher zweizähliger Axen möglich. (Vergl. Satz 18.)

§ 7. Arten und Richtungen der verschiedenen in demselben System vorhandenen Axen.

Satz 15. *Wenn gleiche n-zählige Axen nur nach einer Richtung verlaufen, so können irgend welche andere Axen des Systems doch nur nach derselben Richtung verlaufen. Solche Systeme sind also „Punktsysteme mit einer einzigen Axenrichtung".*

Beweis. Angenommen es verliefe irgend eine Axe in anderer als der gegebenen Richtung, so würde die Ausführung der zu ihr gehörenden Deckbewegung auf n-zählige Axen von neuen Richtungen führen, was gegen die Voraussetzung ist. Wäre z. B. eine zweizählige Axe senkrecht zur gegebenen Axenrichtung vorhanden, so würde sie auf gleiche n-zählige Axen von genau entgegengesetzter Richtung führen, welche ebenfalls ausgeschlossen ist. Somit bleibt die gegebene Richtung als einzig mögliche auch für irgend welche andere Axen übrig. —

Was für verschiedene Axenarten in ein und demselben „Punktsystem mit einer einzigen Axenrichtung" vorkommen können, wird erst später ermittelt (Capitel V, § 9). In diesem § dagegen werden nur die verschiedenen Arten und Richtungen von Axen in Punktsystemen mit mehreren Axenrichtungen untersucht.

Erklärung: *Diejenigen unter allen Axen eines Systems, welche den kleinsten charakteristischen Drehwinkel besitzen, mögen Hauptaxen heissen.* Sie sind die „meistzähligen" Axen des Systems, denn n hat für sie den grössten Werth.

Nun sind nacheinander folgende Fälle zu behandeln:

1. Gleiche Hauptaxen verlaufen nur nach zwei entgegengesetzten Richtungen.

2. Sie verlaufen nach den Ecken eines der in Satz 13 ermittelten regulären Polyeder.

3. Endlich ist noch der Fall, wo die Hauptaxen zweizählig sind, also überhaupt keine anderszähligen Axen vorkommen, besonders zu untersuchen.

Satz 16. *Wenn ein Punktsystem gleiche n-zählige Axen besitzt, die nur nach zwei entgegengesetzten Richtungen verlaufen, so besitzt es zugleich, senkrecht zu den vorigen:*

a) zweizählige, untereinander gleiche, Axen nach n Richtungen, deren je 2 Nachbarrichtungen den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ *miteinander bilden, und*

b) andere zweizählige, untereinander gleiche, Axen, deren Richtungen die Winkel $\frac{2\pi}{n}$ *der vorigen halbiren.*

Beweis zu a). Weil das System nach Voraussetzung gleiche Axen $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ von entgegengesetzten Richtungen enthält, so muss es, nach der Erklärung der Gleichheit von Axen, pag. 37, mit sich selbst zur Deckung gebracht werden können dadurch, dass man eine Axe A mit einer gleichen entgegengesetzt gerichteten zur Deckung bringt. Dies erfordert eine Umdrehung des Systems um 180°; also gehört zu den Deckbewegungen des Systems jedenfalls eine *zweizählige* Drehung oder Schraubung um eine Axe Q, die zu den Richtungen der Axen A senkrecht verläuft. Letztere Axe kann nur zweizählig sein, denn wäre sie mehrzählig, so würden durch sie n-zählige Axen von noch mehr als den 2 entgegengesetzten Richtungen gefordert werden, was gegen die Voraussetzung ist. Durch wiederholte Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ entspringen aus der einen Queraxe Q noch mehrere, ihr gleiche. — Legt man wieder zu sämmtlichen Axenrichtungen Parallele durch einen Punkt O eines anderen Raums, so bestimmen die sämmtlichen zweizähligen Queraxen Q auf der um O beschriebenen Hülfskugel n gleichweit voneinander entfernte Punkte auf einem grössten

Kreise, zu welchem die 2 Richtungen der Axen A senkrecht stehn.

Beweis zu b) (Fig. 11). Die beiden Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{n},l}$ und $Q_{\frac{2\pi}{2},m}$, welche das System nach dem Vorigen besitzt, sind zusammen äquivalent einer gewissen Schraubung (Hülfssatz VII), welche demnach auch eine Deckbewegung des Systems sein muss (Hülfssatz IX), so dass ihre Axe zu den Axen des Systems gehört. Die Richtung derselben findet man nach Hülfssatz VII und III durch folgende Konstruktion auf der Hülfskugel. An den durch die Axenschnittpunkte A und Q gelegten grössten Kreis trägt man in A den halben zu A gehörigen Drehwinkel, also $\frac{\pi}{n}$, und in Q den zu dieser Axe gehörigen halben Drehwinkel, also $\frac{\pi}{2}$, nach der richtigen Seite hin an (Satz III). Der Schnittpunkt R beider angelegten grössten Kreise bestimmt die Richtung, und der dortige Aussenwinkel

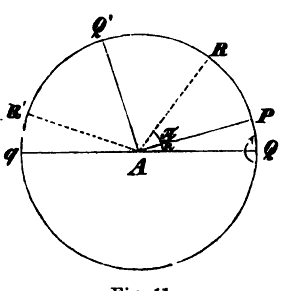


Fig. 11.

des Dreiecks AQR, welcher $=\frac{\pi}{2}$ ist, den Drehwinkel der neuen Axe. Dieselbe ist, der Konstruktion zufolge, zweizählig, und ihre Richtung halbirt den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ zweier Nachbarrichtungen der Axen Q. — In gleicher Weise wie diese eine Axe R leiten sich die übrigen ihr gleichen ab; ihre Schnittpunkte auf der Hülfskugel halbiren die Bögen zwischen je 2 Nachbarpunkten Q.

Zusatz. *Aus dem Vorhandensein der in Satz 16 angegebenen Axenrichtungen folgen keine anderen Axenrichtungen.*

Beweis. Auf der Hülfskugel finden sich an allen Bögen, die irgend ein Paar Axenpunkte verbinden, in diesen Punkten alle für sie möglichen halben Drehwinkel angetragen, so dass bei der Konstruktion der zu 2 Axen äquivalenten Axen (nach Hülfssatz III) immer nur schon vorhandene Schnittpunkte von Bögen vorkommen.

Satz 17. *In einem Punktsystem, dessen gleiche Hauptaxen*

$A_{\frac{2\pi}{n},l}$ *nur nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, sind andere Axenrichtungen als die im Satz 16 angegebenen überhaupt nicht möglich* (Fig. 11).

Beweis. Angenommen es gäbe eine Axe in einer anderen Richtung als den im Satz 16 gefundenen, so kann diese andere Richtung jedenfalls nur senkrecht zu den 2 Richtungen der Hauptaxen A sein; denn sonst würden für die Hauptaxen durch sie noch neue Richtungen gefordert, was gegen die Voraussetzung ist. Aus demselben Grunde könnte eine solche neue Axe, auch wenn sie senkrecht zu A wäre, doch nur zweizählig sein. Aber auch eine solche kann nicht existiren; denn angenommen es gäbe eine, von den schon ermittelten Axen Q und R verschiedene, zweizählige Axe P, so fiele der durch sie bestimmte Punkt auf der Hülfskugel zwischen irgend 2 nächstbenachbarte Punkte der vorher ermittelten zweizähligen Axen Q und R auf demselben grössten Kreise. Q sei der nächste Axenpunkt bei P, so dass der Bogen $PQ < RQ$, d. h. $< \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}$. Weil nun nach dem vorigen Satze die Zahl der senkrecht zu A verlaufenden Richtungen zweizähliger Axen $= 2n$ ist, so ist auch der zu Q diametral gegenüberliegende Punkt q der Kugel ein die Richtung einer zweizähligen Axe bestimmender. Die beiden Bewegungen, erst um die Axe von der Richtung OP, dann um die von der Richtung Oq, sind zusammen äquivalent einer gewissen Schraubenbewegung (Hülfssatz VII), welche nach Hülfssatz IX ebenfalls eine Deckbewegung sein muss. Ihre Axenrichtung findet man (nach VII und III), indem man an den Bogen Pq in P und q die betreffenden halben Drehwinkel, d. h. beidemal $\frac{\pi}{2}$, anträgt. Beide angetragene Bögen schneiden sich im Punkt A, also fällt die Richtung jener Deckbewegung, die mit den genannten beiden Bewegungen äquivalent ist, mit einer von beiden Richtungen der meistzähligen Axen zusammen. Der ihr zugehörige Drehwinkel ist doppelt so gross als der bei A gelegene Aussenwinkel des Dreiecks APq, also $= 2 \,.\, PAQ$. Da aber $PAQ < \frac{\pi}{n}$, so wäre jener Drehungswinkel $< \frac{2\pi}{n}$. Danach gäbe es in dem Punktsystem in Rich-

tung der A eine Axe mit kleinerem charakteristischen Drehwinkel als $\frac{2\pi}{n}$; dann wären also die n-zähligen Axen nicht mehr die Hauptaxen (vergl. Erkl. pag. 48), was doch vorausgesetzt war. Folglich ist eine Axe von der Richtung OP unmöglich.

Zusatz. *Es ist nicht ausgeschlossen, dass parallel den Hauptaxen auch noch minderzählige Axen existiren.*

Satz 18. *Wenn ein Punktsystem gleiche n-zählige Axen besitzt, die parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Polyeders verlaufen, so besitzt es zugleich:*

a) p-zählige, untereinander gleiche Axen, parallel den Radien nach den Mitten der das Polyeder begrenzenden p-ecke, und

b) zweizählige, untereinander gleiche Axen, parallel den Radien nach den Mitten der Polyederkanten (Fig. 12).

Beweis zu a). Die beiden Deckbewegungen um 2 gleiche n-zählige Axen von kleinster gegenseitiger Neigung sind zusammen äquivalent einer gewissen Schraubenbewegung (Hülfssatz VII), welche nach Hülfssatz IX ebenfalls eine Deckbewegung sein muss. Ihre Axenrichtung findet man (nach VII und III), indem man auf der Hülfskugel in 2 Nachbarecken ($A''A'''$) von einem der sphärischen p-ecke (des Satzes 13) die dortigen Polygonwinkel, die ja die Grösse der n-zähligen Drehung darstellen, halbirt. Die Halbirungslinien schneiden sich im Mittelpunkt P des p-ecks, also giebt der dorthin gerichtete Kugelradius die Richtung der resultirenden Axe an; und ebensolche Axen verlaufen natürlich parallel den Kugelradien nach den Mitten aller p-ecke. Die um eine solche Axe auszuführende Drehung ist nach Hülfssatz III doppelt so gross, als der Aussenwinkel des sphärischen Dreiecks, das durch die Seite und die Mitte des p-ecks bestimmt ist, also $= 2\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) = \frac{p-2}{p} \cdot 2\pi$, also für das Dreieck, Viereck, Fünfeck (die nach Satz 12 und 13 allein vorkommen), resp. $= \frac{2\pi}{3}, 2 \cdot \frac{2\pi}{4}, 3 \cdot \frac{2\pi}{5}$. Die Drehung $\frac{2\pi}{3}$ charakterisirt eine dreizählige Axe; die Drehung $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$ eine fünfzählige, weil

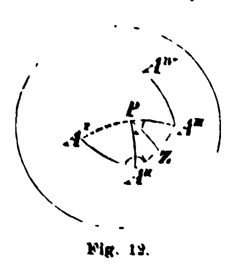


Fig. 12.

zweimalige Ausführung dieser Drehung $= \frac{6}{5} \cdot 2\pi$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $= \frac{2\pi}{5}$ ist. Dagegen könnte die Drehung $2 \cdot \frac{2\pi}{4}$ oder π ebensowohl bei einer zweizähligen als bei einer vierzähligen Axe vorkommen, daher muss noch besonders bewiesen werden, dass die Axe im vorliegenden Fall vierzählig ist. Somit ist die p-zähligkeit der nach der Mitte der p-ecke gerichteten Axen nachgewiesen, ausser für den Fall, dass das Polyeder von Vierecken begrenzt, also ein Würfel, ist. Für diesen Fall wird der Beweis nachher besonders geführt.

Beweis zu b). Die Deckbewegungen, erst um eine der oben ermittelten p-zähligen Axen und darauf um eine, mit ihr einen möglichst kleinen Winkel bildende, n-zählige Axe, sind zusammen äquivalent einer einzigen Deckbewegung, deren Axe (nach Hülfssatz VII und III) auf der Hülfskugel durch den Schnittpunkt Z einer Seite des p-ecks mit einem senkrecht auf diese Seite durch die p-zählige Axe gelegten grössten Kreise bestimmt ist. Denn das durch diesen Punkt und die beiden vorigen Axenpunkte bestimmte Dreieck enthält in der That die halben Drehwinkel der beiden gegebenen Axen. Weil es bei Z rechtwinklig ist, und der dortige Aussenwinkel den halben Drehwinkel der äquivalenten Bewegung darstellt, so beträgt letztere Drehung 180^0. Die Axe kann nur zweizählig sein, denn jede andere Zähligkeit würde noch neue n-zählige Axen fordern, was nach Satz 14 unmöglich.

Beweis zu Satz 18 für den Fall, dass das Polyeder ein Würfel ist (Fig. 13). *Zu b)* Weil dreizählige gleiche Axen A parallel den Kugelradien nach den Würfelecken verlaufen, so sind diese Axen paarweise entgegengesetzt gerichtet. Wegen der Gleichheit dieser Axen muss das System in der Weise mit sich zur Deckung gebracht werden können, dass man eine solche Axe A' mit der entgegengesetzt gerichteten zur Deckung bringt. Folglich muss zu den Deckbewegungen des Systems eine zweizählige Drehung (oder Schraubung) gehören um eine Axe, die in einer Ebene senkrecht zu diesen dreizähligen Axen, d. h. senkrecht zu einer Würfeldiagonale, verläuft. Um die Richtung dieser Axe in der Ebene zu ermitteln, werden wieder zu allen Richtungen von Axen Paral-

lelen durch einen Punkt gelegt und die weitere Konstruktion auf der Kugel ausgeführt. Die fragliche Axe mit zweizähliger Drehung kann nun nur nach einem der Punkte gerichtet sein, in denen jene auf der einen Würfeldiagonale A' senkrechte Ebene die Würfelkanten schneidet, folglich nach einem der Punkte $Z' Z'' Z''' Z^{IV}$ und zwei in der Fig. nicht sichtbaren; denn bei jeder anderen Richtung würden durch Ausführung einer zweizähligen Drehung oder Schraubung noch neue Richtungen für die dreizähligen Axen A gefordert werden, was nach Satz 14 unmöglich. Aus demselben Grunde kann diese neue Axe nur 2-zählig, und nicht etwa 4-zählig sein. Nach welchem der Punkte Z man diese Axe gerichtet denkt, ist gleichgültig, denn durch die dreizähligen Axen ist alsdann doch immer bedingt, dass gleiche zweizählige Axen parallel den Kugelradien nach sämmtlichen Kantenmitten verlaufen.

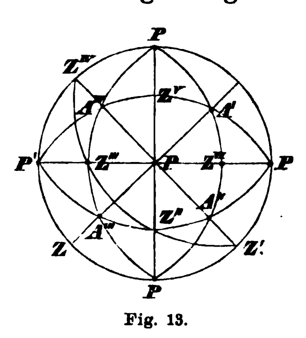


Fig. 13.

Zu a) Wie bei dem allgemeinen Beweise des Satzes 18 b) aus der Existenz p-zähliger Axen P und n-zähliger Axen A die Existenz zweizähliger Axen Z folgte: so folgt hier aus dem Vorhandensein der zweizähligen Axen Z und der dreizähligen Axen A das Vorhandensein von Axen, die parallel den Kugelradien nach den Mitten P der Vierecke verlaufen. Weil nun der bei P gelegene Aussenwinkel eines Dreiecks, das durch drei nächstbenachbarte verschiedene Axen (ZAP) gebildet wird, $= 135^0$, die äquivalente Drehung um die Axe P also $= 270^0 = 3 \cdot \frac{\pi}{4}$ ist, und folglich die dreimalige Anwendung dieser Deckbewegung eine Drehung um $\frac{9 \cdot \pi}{4}$, oder einfach um $\frac{\pi}{4}$ bedingt, so ist die nach P gerichtete Axe 4-zählig.

Zusatz: *Es ist nicht ausgeschlossen, dass* $p = n$ ist. Dann sind die beiderlei Axenarten zwar gleichvielzählig, aber trotzdem nicht gleich, d. h. nicht deckbar. Dieser Fall ist beim Tetraëder realisirt.

Satz 19. *Gleiche dreizählige Axen können nicht parallel*

den Kugelradien nach den Ecken des regulären Dodekaëders verlaufen (wie es nach Satz 13 möglich schien).

Beweis. Wenn sie nämlich so verliefen, so müssten nach dem vorigen Satz 5-zählige Axen parallel den Radien nach den Mitten der regulären Fünfecke, die das Dodekaëder begrenzen, verlaufen. Solche Axen sind aber in regelmässigen unendlichen Punktsystemen unmöglich (Satz 9); also ist das Dodekaëder als „Axenrichtungen bestimmendes Polyeder" ausgeschlossen.

Satz 20. *Der Fall, dass in einem Punktsystem vierzählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Oktaëderecken verlaufen, ist identisch mit jenem, wo dreizählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Würfelecken verlaufen.*

Beweis. Aus dem Vorhandensein vierzähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Oktaëderecken folgt nach Satz 18 die Existenz dreizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Mitten der Oktaëderflächen, sowie zweizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Kantenmitten. — Nach demselben Satze folgt aus dem Vorhandensein dreizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Würfelecken die Existenz zweizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Würfelkantenmitten, sowie vierzähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Flächenmitten. Weil nun die Richtungen der Radien nach den Oktaëderecken dieselben sind wie die nach den Mitten der Flächen eines koncentrischen Würfels, dessen Kanten den vierzähligen Oktaëderaxen parallel laufen, so haben die vierzähligen Axen in beiden Fällen übereinstimmende Richtungen. Ferner sind die Richtungen der Radien nach den Oktaëderflächenmitten dieselben wie die nach den Ecken jenes Würfels; folglich haben auch die dreizähligen Axen in beiden Fällen übereinstimmende Richtungen. Schliesslich sind auch die Richtungen der zweizähligen Axen in beiden Fällen identisch, weil die Radien nach den Oktaëderkantenmitten mit denjenigen nach den Kantenmitten jenes Würfels zusammenfallen. Folglich sind beide Fälle völlig identisch.

Satz 21. *Aus dem Vorhandensein der in Satz 18 angegebenen Axenrichtungen folgen keine weiteren* (Fig. 14 und 13).

Beweis. Weil den beiden vorigen Sätzen zufolge nur noch das Tetraëder und der Würfel (oder statt dessen das

Oktaëder) als Axenrichtungen bestimmend in Betracht kommen, so ist nur für diese beiden der Beweis zu führen.

a) Im Falle des *Tetraëders* (Fig. 14) lege man auf der Hülfskugel durch je 2 Ecken A und je 2 über den Flächenmitten des Tetraëders gelegene Punkte P grösste Kreise, so schneiden sie sich in den Punkten Z, die den Kantenmitten entsprechen. Um jetzt für eine solche Bewegung, welche den Bewegungen um irgend 2 vorhandene Axen zusammen äquivalent ist, die Axe zu konstruiren, muss man nach Hülfssatz VII und III die beiden Axenpunkte durch einen grössten Kreis verbinden und an ihn in den Axenpunkten die betreffenden halben Drehwinkel antragen. Man bemerkt nun, dass sämmtliche hierbei auftretende Kreise auf der Hülfskugel schon vorhanden

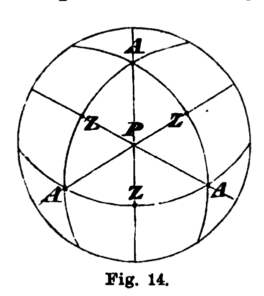


Fig. 14.

sind, — mit Ausnahme der durch je zwei Z gehenden Bogen, — und dass in den Axenpunkten alle für sie möglichen halben Drehwinkel an alle Bogen schon angetragen vorkommen. Daher treten bei der Konstruktion der zu zweien Axen äquivalenten Axe immer nur schon vorhandene Schnittpunkte von Kreisbögen, d. h. schon vorhandene Axen, auf. — Nur bei der Kombination von 2 zweizähligen Drehungen um 2 Axen Z ist dies noch unbewiesen. Nun aber verlaufen die sämmtlichen zweizähligen Axen des Tetraëders längs dreier sich senkrecht schneidender Linien; daher folgt aus der Kombination je zweier solcher Drehungen nach Hülfssatz III immer nur eine der schon vorhandenen zweizähligen Axen.

b) Im Falle des *Würfels* (Fig. 13) lege man auf der Hülfskugel wieder durch je 2 Ecken A und je 2 über den Flächenmitten des Würfels gelegene Punkte P grösste Kreise, so schneiden sie sich in den Punkten Z über den Kantenmitten. Hierdurch finden sich schon durch grösste Kreise verbunden je 2 Axenpunkte A, je 2 Axenpunkte P, je ein A und ein P, und je ein P und ein Z; und an diesen Verbindungsbögen sind in den Axenpunkten auch alle für sie möglichen halben Drehwinkel schon angetragen, so dass die Axe einer solchen Bewegung, die zweien aufeinanderfolgenden Bewegungen eines der genannten Axenpaare äquivalent

ist, immer durch einen schon vorhandenen Schnitt von Kreisbögen dargestellt wird, also mit einer schon vorhandenen Axe zusammenfällt. Es bleibt nur zu zeigen übrig, dass auch zwei aufeinanderfolgende zweizählige Bewegungen um irgend zwei Z, und ebenso zwei aufeinanderfolgende Bewegungen bezüglich um Z und um A, zusammen äquivalent sind einer Bewegung um eine schon vorhandene Axe.

α) *Je zwei Z.* Von den 12 Z kommen nur 6 in Betracht, weil je 2 diametral gegenüberliegen. Kombinirt man zunächst eine Bewegung um eine solche Axe, Z'', mit derjenigen um eine der nächstbenachbarten Z', Z''', Z, Z^{VI}, so ist jedes solche Bewegungspaar nach Hülfssatz VII und III äquivalent einer Drehung um $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ um eine Axe A, die zu dem betreffenden Axenpaar senkrecht liegt (in den ersten beiden Fällen um A', in den letzten beiden um A^{IV}). Kombinirt man aber zwei Bewegungen wie um Z'' und Z^{V}, so sind sie äquivalent einer zweizähligen Drehung um eine vierzählige Axe P'. — Hier entspringt also keine neue Axe.

β) *Eine Z und eine A.* Von den 8 A kommen nur 4 in Betracht, weil je 2 diametral gegenüberliegen. Z'' ist mit seinen nächsten Nachbaraxen A (A'' und A''') durch schon vorhandene grösste Kreise verbunden; also sind zwei aufeinanderfolgende Bewegungen um ein solches Paar äquivalent einer Bewegung um eine Nachbaraxe P. Kombinirt man aber die Bewegung um Z'' mit einer um eine entferntere Axe A' (oder A^{IV}), welche mit ihr einen rechten Winkel einschliesst, so erhält man die Axe der äquivalenten Bewegung, indem man in A' einen der möglichen halben Drehwinkel an den Bogen $Z''A'$ anträgt. Der in Z'' anzutragende halbe Drehwinkel (90°) liefert den Bogen $Z' Z'' Z''' Z^{IV}$. Dieser Bogen wird von einem der in A' angetragenen Bögen in einem der Punkte Z', Z'', Z''', Z^{IV} geschnitten. Also entsteht auch hierbei keine neue Axe.

Satz 22. *In Punktsystemen mit vierzähligen oder dreizähligen gleichen Axen nach mehr als 2 Richtungen sind die einzigen, für irgend welche Axen überhaupt möglichen Richtungen diejenigen der Radien nach den Ecken, den Flächenmitten und den Kantenmitten der in Satz 13 angegebenen Polyeder (Würfel, Oktaëder, Tetraëder).*

Beweis. Welche Axen das System auch besitzen mag: jedenfalls dürfen sie für die vierzähligen oder dreizähligen gleichen Axen keine anderen Richtungen als die in Satz 13 ermittelten fordern, weil diese nach Satz 14 die einzig möglichen für gleiche n-zählige Axen sind. Während nun durch Drehung der Hülfskugel sowohl um die nach den Flächenmitten des Polyëders gerichteten p-zähligen Axen, als um die nach den Kantenmitten gerichteten zweizähligen stets wieder Deckung des Polyëders mit sich selbst eintritt, so dass für die nach den Polyëderecken verlaufenden n-zähligen Axen in der That keine neuen Richtungen gefordert werden, so kommt dagegen das Polyëder keinenfalls mit sich zur Deckung, wenn man es um irgend einen Radius dreht, der nicht nach einer Ecke, Flächenmitte oder Kantenmitte verläuft. Durch eine so gerichtete Axe würden also stets neue unmögliche Richtungen für die n-zähligen Axen gefordert werden; daher können so gerichtete Axen irgend welcher Art nicht vorkommen.

Zusatz. *Wenn vierzählige Axen nach mehr als zwei Richtungen verlaufen, so ist es nicht ausgeschlossen, dass parallel zu ihnen auch zweizählige Axen verlaufen.* Denn solche führen auf keine neuen Axenrichtungen.

Zusammenfassung der Ergebnisse von Satz 18—22. Für Punktsysteme mit gleichen vierzähligen oder dreizähligen Axen von mehr als 2 Richtungen giebt es nur folgende 2 Abtheilungen:

a) 4 dreizählige Axen verlaufen parallel den Radien nach den Tetraëderecken, 4 andere dreizählige in den entgegengesetzten Richtungen, nämlich nach den Flächenmitten, gleichzeitig verlaufen 6 gleiche zweizählige parallel den Radien nach den Kantenmitten. (Anders ausgedrückt: 6 zweizählige Axen nach den Oktaëderecken, 4 dreizählige nach den *abwechselnden* Flächenmitten.)

b) 6 vierzählige Axen verlaufen parallel den Radien nach den Oktaëderecken, 8 dreizählige parallel den Radien nach den Oktaëderflächenmitten und 12 zweizählige parallel den Radien nach den Kantenmitten.

Satz 23. *In einem Punktsystem mit zweizähligen Hauptaxen können die Richtungen zweier solchen Axen nur die Winkel 0^0 oder 90^0 oder 180^0 einschliessen.* (*Fig. 15.*)

Beweis. Angenommen es gäbe 2 Axenrichtungen, deren Winkel ein anderer als 0^0, 90^0 oder 180^0 wäre. Der eine Axenschnittpunkt auf der Hülfskugel sei A; von den 2 Schnittpunkten der anderen Axe betrachtet man dann denjenigen, A', dessen Bogenabstand α von A grösser als 90^0 ist. (Bogen $\widehat{AA'} = \alpha > 90^0$). Aequivalent mit den um A und A' nacheinander auszuführenden Bewegungen ist nun eine Bewegung um eine dritte Axe H, deren Richtung nach Hülfssatz VII und III senkrecht auf den Richtungen der Axen A und A' gefunden wird, und deren Drehwinkel gleich dem doppelten bei H gelegenen Aussenwinkel des Dreiecks AHA' ist, also $= 2 \,.\, (180^0 - \alpha)$. Dieser Winkel ist nun, weil $\alpha > 90^0$, kleiner als 180^0; folglich wäre die Axe H mehr- als 2-zählig, was gegen die Voraussetzung ist. Dieser Widerspruch entsteht nur dann nicht, wenn α einen der Werthe 0^0, 90^0 oder 180^0 hat.

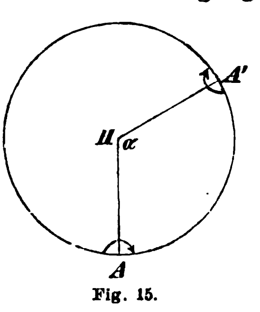


Fig. 15.

Satz 24. *Wenn ein Punktsystem zweizählige Hauptaxen von verschiedenen Richtungen besitzt, so verlaufen sie nach 3 Paaren von entgegengesetzten Richtungen, deren jedes auf den beiden anderen senkrecht steht. Andere Axenrichtungen kommen dann nicht vor.*

Beweis. Wenn ein Paar gleicher entgegengesetzt gerichteter zweizähliger Axen gegeben ist, so folgt daraus nach Satz 16 die Existenz der 2 anderen darauf senkrechten Paare. — Wenn aber von vornherein nur die Existenz von 2 zweizähligen Axen bekannt ist, deren Richtungen einen rechten Winkel einschliessen, so sind die Deckbewegungen um dieselben nach Hülfssatz VII und III zusammen äquivalent einer auf ihnen senkrechten zweizähligen Axe, die nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung verlaufend gefunden wird je nach der Reihenfolge, in der man die beiden gegebenen Bewegungen nacheinander ausführt. Aus diesem entgegengesetzten Axenpaar und einer der gegebenen Axen folgt die Existenz eines zweiten Axenpaars parallel der anderen gegebenen Axe. — Sollte es ausserdem noch eine andere Axenrichtung geben, so müsste sie mit einer der vori-

gen einen von 0°, 90° und 180° verschiedenen Winkel bilden; und das ist nach dem vorigen Satz unmöglich.

Satz 25. *Wenn zweizählige Hauptaxen von verschiedenen Richtungen vorhanden sind, so sind je 2 aufeinander senkrechte einander nicht gleich.*

Beweis. Wären die aufeinander senkrechten einander gleich, so müssteu sie sich zur Deckung bringen lassen (Erklärung der Gleichheit). Durch eine Bewegung um eine zu den 3 Paaren zweizähliger Axen gehörige Axe lässt sich die Deckung nicht bewerkstelligen; andre zweizählige Axen giebt es nicht; und mehrzählige Axen sind ausgeschlossen. Also lässt sich jene Deckung überhaupt nicht herbeiführen.

Eintheilung der regelmässigen unendlichen Punktsysteme.

Auf Grund der Ergebnisse dieses Capitels (vgl. besonders die Zusammenfassungen auf Seite 46 und 58) zerfallen sämmtliche regelmässigen unendlichen Punktsysteme in folgende Abtheilungen:

I. Systeme ohne Axen.

II. Systeme mit einer einzigen Axenrichtung.
1. Die Hauptaxen sind 6-zählig.
2. „ „ „ 4-zählig.
3. „ „ „ 3-zählig.
4. „ „ „ 2-zählig.

III. Systeme mit gleichen Hauptaxen nach nur zwei (und zwar entgegengesetzten) Richtungen.
1. Die Hauptaxen sind 6-zählig.
2. „ „ „ 4-zählig.
3. „ „ „ 3-zählig.
4. „ „ „ 2-zählig.

IV. Systeme mit gleichen Hauptaxen nach mehr als zwei Richtungen.
1. Die Hauptaxen sind 3-zählig.
2. „ „ „ 4-zählig.

Abschnitt II.

Konstruktion der regelmässigen allseitig unendlichen Punktsysteme.

Capitel IV.

Punktsysteme ohne Axen.

§ 8. **Konstruktion der Systeme ohne Axen.** (Fig. 1. Tafel I.)

Gegeben sei ein regelmässiges unendliches Punktsystem, unter dessen Deckbewegungen keine Drehungen oder Schraubungen vorkommen, sondern die sämmtlich nur in Schiebungen bestehen. P und P' seien 2 Punkte des Systems, welche so liegen, dass kein anderes Punktpaar einen kleineren Abstand habe als dieses. Wegen der Regelmässigkeit des Systems müssen sich beide Punkte zur Deckung bringen lassen, wobei gleichzeitig das ganze bewegliche System mit dem festen zur Deckung gelangt. Weil nun als Deckbewegungen nur Schiebungen vorkommen, so muss $PP' = \lambda_1$ eine Deckbewegung sein. Durch diese Bewegung gelangt P' an einen Ort P'', so dass $P''P' = P'P$. Es ist also auch P'' ein Punkt des festen Systems. So fortschliessend erkennt man, dass in dem Systeme Punkte in gleichen Abständen eine gerade Linie L besetzen. Andere als diese Punkte können auf der Linie nicht vorkommen; denn jeder noch ausserdem vorhandene Punkt würde von einem der äquidistanten Punkte einen kleineren Abstand als PP' haben; und das ist unmöglich. — Ferner sei Q ein solcher Punkt des Systems, dass kein anderer näher als er an der Geraden L liege. Derjenige Systempunkt auf der Linie L, welcher zu Q am nächsten liegt, heisse P. Die Deckbewegung $PQ = \lambda_2$ lehrt die Existenz von Systempunkten, die eine zu L parallele Linie L' in kongruenter Weise besetzen, als wie L besetzt ist. Dabei gelangt Q nach Q', also ist auch Q' ein Punkt des Systems. Wiederholte Ausführung dieser Deckbewegung lehrt die Existenz von Systempunkten, die lauter parallele gleich-

weit abstehende Linien L in kongruenter Weise besetzen, so dass ein parallelogrammatisches Punktnetz gebildet wird. — In derselben Ebene E können keine anderen Punkte des Systems liegen, denn auf einer der Linien L ist es nicht möglich, weil sonst PP' nicht mehr der kleinste Punktabstand wäre; und zwischen 2 Linien L ist es auch nicht möglich, sonst würde die Deckbewegung, welche einen solchen Punkt in einen Systempunkt auf der nächsten Linie L hineinführt, die Existenz von Punkten nach sich ziehn, die näher als Q an L lägen, was unmöglich ist.

Endlich sei R ein solcher Punkt des Systems, dass kein anderer näher als er an der mit Punkten besetzten Ebene E liege. Seine Orthogonalprojektion auf die Ebene sei r. Der an R nächste Systempunkt dieser Ebene sei P. Dann liefert die Deckbewegung $PR = \lambda_3$ die Existenz von Systempunkten, welche eine zu E parallele Ebene in kongruenter Weise besetzen, als wie E besetzt ist. Dabei gelangt R nach R', also ist auch R' ein Punkt des Systems. Wiederholte Ausführung dieser Deckbewegung PR lehrt die Existenz von Systempunkten, welche lauter parallele, gleichweit abstehende Ebenen in kongruenter Weise besetzen. *Die Gesammtheit dieser Systempunkte bildet ein Raumgitter mit parallelepipedischen Maschen.* — Andere als diese Punkte können nicht zu dem System gehören; denn zunächst kann in keiner der Ebenen E ein anderer als die bisher konstruirten Punkte liegen, weil sonst auch in der ursprünglichen Ebene noch ein entsprechender neuer Punkt liegen müsste, was nach dem Vorigen unmöglich ist; sodann kann aber auch zwischen 2 Ebenen E kein neuer Punkt liegen, weil sonst auch ein entsprechender zwischen der ursprünglichen und ihrer Nachbarebene liegen müsste, was nach dem Vorigen wiederum unmöglich ist.

Resultat: Regelmässige unendliche Punktsysteme ohne Axen sind Raumgitter mit parallelepipedischen Maschen; sie werden gebildet von der Gesammtheit der Schnittpunkte dreier Züge von parallelen, je äquidistanten Ebenen.[1]) Die Charakteristik durch die Deckbewegungen ist: λ_1, λ_2, λ_3.

1) Die hier gegebene Ableitung ist im Wesentlichen die früher von mir veröffentlichte in Pogg. Ann. Bd. 132. pag. 77. 1867.

Anmerkung. Nicht alle Raumgitter sind axenlos; sondern bei passender Wahl der Kanten und Winkel der parallelepipedischen Maschen besitzen sie Axen (vgl. Seite 19, 20, 21). Daraus erklärt es sich, dass sie von Seeber, Frankenheim, Delafosse und Bravais für die wahren Strukturformen aller Krystalle gehalten werden konnten.

Capitel V.

Punktsysteme mit Hauptaxen von einer einzigen Richtung.

§ 9. Anordnung der Axen in solchen Systemen, deren Hauptaxen in lauter parallelen Geraden liegen.

Der Inhalt dieses § bezieht sich, gemäss seiner Ueberschrift, im Allgemeinen nicht nur auf Systeme mit einer einzigen Axenrichtung, sondern auch auf solche, in denen gleiche Hauptaxen nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. (Zum Verständniss des letzteren Falles vergleiche man den Beweis zu Satz 16, a.)

Erklärung: *Der Abstand zweier nächsten Hauptaxen, die in parallelen Geraden liegen, wird stets mit a bezeichnet werden; der Abstand zweier nächsten gleichen und gleichgerichteten Hauptaxen mit e.*

Erklärung: *Hauptebene heisst eine zur Hauptaxenrichtung senkrechte, durch einen Systempunkt gelegte, Ebene.*

Alle Figuren dieses § sind in einer Hauptebene ausgeführt zu denken; dabei sind die Schnittpunkte mit den Axen durch dieselben Buchstaben wie die ganzen Axen bezeichnet.

1) *Anordnung der Axen in Systemen, deren Hauptaxen sechszählig sind und nach einer oder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen.* (Fig. 16.)

A und A' seien 2 in Parallellinien verlaufende sechszählige Axen von solcher Lage, dass kein andres Paar sechszähliger Axen einen kleineren Abstand besitze als diese beiden; er heisse a. Dann gehn durch wiederholte Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{6}, l}$ um A, aus A' noch 5 andere ihr

gleiche Axen hervor, so dass 6 gleiche Axen $A'A''\ldots A^{VI}$ existiren müssen, die in der Hauptebene ein reguläres Sechseck um A als Centrum bestimmen. — Ebenso findet man durch Ausführung der entsprechenden Deckbewegung um A' 6 untereinander gleiche Axen, die durch die Ecken eines regulären Sechsecks gehn, das A' zum Centrum hat. Zu diesen Axen gehören unter anderen auch A und A'', welche somit gleich sind. Vorher waren aber schon A' und A'' als 2 gleiche Axen erkannt. Also sind 3 nächste sechszählige Axen, die ein gleichseitiges Dreieck bestimmen, einander gleich; folglich ist $a = e$. Weil nun um jede sechszählige Axe in derselben Weise wie vorher 6 gleiche Axen herumstehn müssen, so folgt:

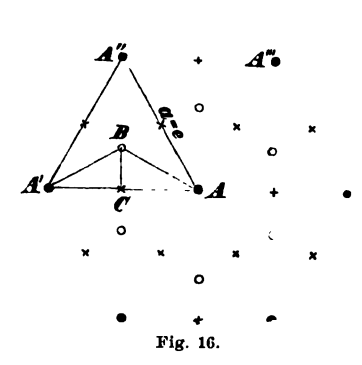


Fig. 16.

Satz 26. *Die Gesammtheit der sechszähligen gleichen, in parallelen Geraden verlaufenden Hauptaxen A bestimmt in der Hauptebene ein Netz von gleichseitig dreieckigen Maschen.*

Zusatz 1. *Andere sechszählige Axen als die so konstruirten giebt es nicht;* denn jede neue derartige Axe würde von einer der bisher gefundenen um weniger als a abstehn, was unmöglich ist. Dagegen giebt es noch minderzählige Axen. Nämlich die Deckbewegungen um 2 sechszählige Nachbaraxen A' und A sind nach Hülfssatz IV und Zusatz äquivalent *einer* Deckbewegung um eine parallele dreizählige Axe B, gehend durch die Mitte eines gleichseitigen Dreiecks, das A und A' zu Ecken hat. Also:

Zusatz 2. *Untereinander gleiche dreizählige Axen B, parallel den Hauptaxen, gehn durch die Mitten aller gleichseitig dreieckigen Maschen, die durch die sechszähligen Hauptaxen bestimmt sind.*

Ferner ist die Deckbewegung um A nebst der darauf folgenden Deckbewegung um eine benachbarte B, nach denselben 2 Hülfssätzen äquivalent einer einzigen Deckbewegung um eine parallele zweizählige Axe C, gehend durch die Seiten-

mitte eines der um A herumliegenden, durch die Hauptaxen bestimmten, gleichseitigen Dreiecke. Also:

Zusatz 3. *Untereinander gleiche zweizählige Axen C, parallel den Hauptaxen, gehen durch die Seitenmitten aller gleichseitig dreieckigen Maschen, die durch die sechszähligen Hauptaxen A bestimmt sind.*

Satz 27. *Das Vorhandensein der drei Axenschaaren A, B, C zieht die Existenz keiner weiteren Axe nach sich.*

Beweis. Zunächst folgt aus Hülfssatz IV nebst Zusatz, dass die Ausführung der charakteristischen Bewegungen um ein Paar *nächstbenachbarter*, gleicher oder ungleicher Axen (AA, AB, AC, $B'B$, BC oder CC) auf keine Axe führt, welche nicht schon unter jenen 3 Schaaren vorhanden wäre. Um ferner diejenige Bewegung zu ermitteln, welche den aufeinanderfolgenden charakteristischen Bewegungen um irgend zwei *nicht nächstbenachbarte* Axen äquivalent ist, ersetzt man die charakteristische Schraubung um die eine der beiden gegebenen Axen, nach Hülfssatz II Zusatz, durch die gleiche Schraubung um eine gleiche Axe, welche zu der zweiten gegebenen Axe nächstbenachbart ist, verbunden mit einer gewissen Schiebung s. Wegen der Gleichheit der Axen ist die letztere Schraubung ebenfalls eine Deckbewegung des Systems (woraus nach Hülfssatz IX auch jene Schiebung s als eine Deckbewegung erkannt wird). Jetzt sind also 2 charakteristische Schraubungen um 2 nächstbenachbarte Axen auszuführen, und hiermit ist, nach dem Vorigen, eine Schraubung um eine der bereits als vorhanden erkannten Axen äquivalent. — Also wird durch die 3 Axenschaaren keine weitere Axe gefordert.

Satz 28. *In einem Punktsystem mit sechszähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung sind keine anderen Axen möglich, als die sechs-, drei- und zweizähligen des Satzes 26 nebst Zusätzen 2 und 3.*

Beweis. Jede andere Axe würde nämlich neue Lagen für die Hauptaxen nach sich ziehen, was nach Zusatz 1 zu 26 unmöglich.

Zusatz. *Bei sechszähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch zweizählige, auf ihnen senkrechte Axen.* (Satz 16.) Näheres in Cap. VI.

2) *Anordnung der Axen in Systemen, deren Haupt-*

axen vierzählig sind und nach einer oder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. (Fig. 17.)

A und B seien 2 in Parallellinien verlaufende vierzählige Axen von solcher Lage, dass kein andres Paar vierzähliger Axen einen kleineren Abstand habe als dieses; er heisse a. Dann gehen durch wiederholte Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, l}$, aus B noch 3 ihr gleiche Axen hervor, so dass 4 gleiche Axen B, B', B'' .. existiren müssen, die in der Hauptebene ein Quadrat um A als Centrum bestimmen. Ebenso findet man, dass 4 untereinander gleiche Axen A, A', A'' .. existiren müssen, die ein Quadrat um B als Centrum bestimmen. So fortschliessend erkennt man:

Satz 29. *Die Gesammtheit der vierzähligen in parallelen Geraden verlaufenden Hauptaxen bestimmt in der Hauptebene 2 ineinander gestellte Netze* mit quadratischen Maschen, so dass die Netzpunkte A des einen Netzes in die Mittelpunkte der quadratischen Maschen des von den anderen (B) gebildeten Netzes fallen.*

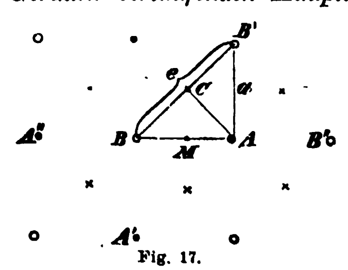


Fig. 17.

Zusatz 1. *Andere vierzählige Axen als die so konstruirten giebt es nicht;* denn jede neue derartige Axe würde von einer der bisher gefundenen um weniger als a abstehn, was unmöglich ist.

Dagegen giebt es noch minderzählige Axen. Nämlich die charakteristischen Deckbewegungen um 2 vierzählige Nachbaraxen A und B sind nach Hülfssatz IV und Zusatz äquivalent einer Deckbewegung um eine parallele zweizählige Axe C, gehend durch die Mitte eines Quadrats, von dem A und B zwei Nachbarecken sind. Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn zu beiden Axen A und B der gleiche Drehungssinn gehört. Haben dagegen beide Drehungen entgegengesetzten Sinn, so kann man sie doch auf zwei Bewegungen gleichen Drehungssinns zurückführen. Bezeichnet man nämlich den Drehungssinn von B als negativ, so entsteht durch dreimalige Ausführung der charakteristischen Deckbewegung um B die Deckbewegung $B_{-3\frac{2\pi}{4}, 3l}$, und diese ist identisch

mit der Schraubung $B_{+\frac{2\pi}{4}, 3m}$, d. h. mit einer Schraubung desselben Drehungssinnes als bei A. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, l}$ und $B_{\frac{2\pi}{4}, 3m}$ sind nun zusammen äquivalent einer zweizähligen Schraubung um C, wie vorher. Also:

Zusatz 2. *Zweizählige gleiche Axen C, parallel den Hauptaxen, gehen durch die Mitten aller Quadrate, deren Seiten durch 2 nächstbenachbarte vierzählige Axen A und B bestimmt sind.*

Satz 30. *Das Vorhandensein der bisher ermittelten vierzähligen und zweizähligen Axen (A, B, C) zieht die Existenz keiner weiteren Axe nach sich.*

Beweis ist wörtlich derselbe wie bei Satz 27.

Satz 31. *Eine Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene gleich dem Abstande a zweier nächsten vierzähligen Axen A und B ist, kann nicht zu den Deckbewegungen des Systems gehören.*

Beweis. Denn nach Hülfssatz II nebst Zusatz würde eine solche Schiebung, verbunden mit einer vierzähligen Drehung (oder Schraubung) um eine Axe A oder B äquivalent sein einer vierzähligen Bewegung um eine Axe C. Folglich wäre C eine vierzählige Axe; das ist aber unmöglich, weil C näher an A liegt, als B, während doch A und B ein Paar nächstbenachbarter vierzähliger Axen sein sollten.

Satz 32. *In einem Punktsystem mit vierzähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung sind keine anderen Axen möglich als die vier- und zweizähligen des Satzes 29 nebst Zusatz 2.*

Beweis. Jede andere Axe, ausser einer solchen, welche mitten zwischen 2 nächsten Hauptaxen A, B verliefe, würde auf neue Lagen für die Hauptaxen führen, was nach Zusatz 1 zu Satz 29 unmöglich. Aber auch mitten zwischen 2 nächsten Hauptaxen A und B darf keine Axe verlaufen. Existirte nämlich eine solche (M), so könnte sie höchstens zweizählig sein, weil sonst neue Lagen für vierzählige Axen gefordert würden. Würde man nun die zweizählige Deckbewegung um eine solche Axe M, und darauf die zweizählige Deckbewegung um die nächste Axe C des festen Systems ausführen, so käme das bewegliche System in dieselbe Lage wie durch eine Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene

$= 2 \cdot CM = a$ wäre. Da dies nach dem vorigen Satz unmöglich ist, so kann auch keine Axe M existiren.

Zusatz. *Bei vierzähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch, senkrecht zu ihnen, zweizählige Axen* (Satz 16). Näheres in Cap. VI.

Satz 33. *Je 2 nächste vierzählige Axen A und B sind ungleich.*

Beweis. Bei Gleichheit müssten sie sich nämlich zur Deckung bringen lassen (nach der Erkl. der Gleichheit). Nun ist von den vorhandenen Axen keine geeignet, dass durch Drehung um sie 2 benachbarte Hauptaxen A und B zur Deckung kämen. Ebensowenig aber giebt es eine Deckschiebung, deren Projektion auf die Hauptebene $= AB = a$ wäre (Satz 31). Also ist die Deckung von A und B nicht ausführbar; folglich sind diese Axen einander nicht gleich.

3) *Anordnung der Axen in Systemen, deren Hauptaxen dreizählig sind und nach einer oder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen.* (Fig. 18.)

A und B seien 2 in Parallellinien verlaufende dreizählige Axen von solcher Lage, dass kein andres Paar dreizähliger Axen einen kleineren Abstand habe als dieses; er heisse a. Dann gehn durch wiederholte Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{3}, t}$ aus B noch 2 ihr gleiche Axen B', B'' hervor, so dass 3 gleiche Axen B existiren müssen, die in der Hauptebene ein gleichseitiges Dreieck um A als Centrum bestimmen. Ebenso müssen 3 untereinander gleiche Axen A um B herumliegen. So fortschliessend findet man die Hauptebene erfüllt von Axenschnittpunkten, die ein Netz von regelmässig sechsseitigen Maschen bilden, und zwar so, dass je 2 nächste dreizählige Axen verschiedene Benennung (A, B) haben. — Neben diesen giebt es noch andere dreizählige Axen C, welche durch die Mitten der sechseckigen Maschen gehn. Eine solche Axe gehört näm-

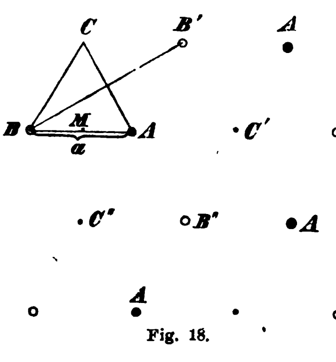


Fig. 18.

lich zu einer Deckbewegnng, welche äquivalent ist den charakteristischen Deckbewegungen um 2 nächste dreizählige Axen A und B. Dies folgt, bei gleichem Drehungssinn der beiden Ausgangsaxen A und B, unmittelbar aus Hülfssatz IV (und Zusatz); entgegengesetzter Drehungssinn aber lässt sich auf gleichen zurückführen, wie bei der Ableitung des Zusatzes 2 zu Satz 29. Also folgt:

Satz 34. *Die Gesammtheit der dreizähligen in parallelen Geraden verlaufenden Hauptaxen bestimmt in der Hauptebene ein Netz mit gleichseitig dreieckigen Maschen, wobei jede Masche von 3 ungleich benannten Axen A, B, C gebildet wird. Jede der 3 Axenarten für sich bildet ebenfalls ein Netz mit gleichseitig dreieckigen Maschen.*

Zusatz. *Andere dreizählige Axen als die so konstruirten giebt es nicht;* denn jede neue derartige Axe würde von einer der vorigen um weniger als a abstehn, was unmöglich.

Satz 35. *Das Vorhandensein der bisher ermittelten dreizähligen Axen A, B, C zieht die Existenz keiner weiteren Axen nach sich.*

Beweis ist wörtlich derselbe wie bei Satz 27.

Satz 36. *In einem Punktsystem mit dreizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung sind überhaupt keine anderen Axen als die dreizähligen des Satzes 34 möglich.*

Beweis: Weil keine anderen dreizähligen Axen existiren können (Satz 34, Zusatz), so kommen nur zweizählige in Frage. Nun würde jede zweizählige Axe, ausser einer solchen, die mitten zwischen 2 nächsten Hauptaxen verliefe, auf neue Lagen für die Hauptaxen führen, was unmöglich. Aber auch mitten zwischen zwei nächsten Hauptaxen (wie A und B) darf keine zweizählige Axe verlaufen. Existirte nämlich eine solche (M), so würden die charakteristischen Bewegungen, die man nacheinander um sie und um eine nächste Hauptaxe (z. B. A) ausführen würde, äquivalent sein einer Bewegung um eine der schon vorhandenen dreizähligen Axen (z. B. C), jedoch betrüge der resultirende Drehwinkel (nach Hülfssatz IV) $2 \,.\, (90^0 + 60^0) = \frac{5}{6} \,.\, 2\pi$. Danach wäre also die resultirende Axe sechszählig; eine solche ist aber in Systemen, deren meistzählige Axen dreizählig sind, unmöglich.

Zusatz. *Bei dreizähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch zweizählige auf ihnen senkrechte Axen.* (Satz 16.) Näheres in Cap. VI.

Satz 37. *Je 2 nächste dreizählige Axen (z. B. A und B) sind ungleich.*

Beweis. Bei Gleichheit müssten sie sich nämlich zur Deckung bringen lassen. Nun ist von den vorhandenen Axen keine geeignet, dass durch Drehung um sie 2 benachbarte Axen zur Deckung kämen. Also könnte die Deckung nur durch eine Schiebung herbeigeführt werden, deren Projektion auf die Hauptebene $= a$ wäre. Eine solche Schiebung aber, verbunden mit der charakteristischen Deckbewegung um eine der Hauptaxen, wäre, nach Hülfssatz II nebst Zusatz, äquivalent einer dreizähligen Bewegung um eine Axe, welche durch das Centrum eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ginge. Dies wäre also eine neue dreizählige Axe, was nach Zusatz zu 34 unmöglich ist. Also kann auch jene Schiebung keine Deckbewegung sein. Daher ist die Deckung zweier Nachbaraxen überhaupt nicht ausführbar.

4) *Anordnung der Axen in Systemen, deren Hauptaxen zweizählig sind und nach einer oder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen.* (Fig. 19.)

A und B seien 2 in parallelen Geraden verlaufende zweizählige Axen von solcher Lage, dass kein anderes Paar einen kleineren Abstand habe als dieses, er heisse a'. Durch Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$ geht aus B eine ihr gleiche Axe B' hervor, und durch Ausführung der Bewegung $B_{\frac{2\pi}{2}, m}$ aus A eine ihr gleiche A'. So fortschliessend findet man, dass die beiden Axenarten A und B stets miteinander abwechseln, so dass ihre Schnittpunkte in der Hauptebene eine gerade Linie L äquidistant besetzen. — Unmittelbar werden keine weiteren Axen gefordert. Weil aber das Punktsystem allseitig unendlich und regelmässig sein soll, so müssen auch noch ausserhalb der Linie L zweizählige in parallelen Geraden verlaufende Axen vorkommen. Unter diesen sei C eine solche, dass keine andere näher als sie an der Geraden L liege. Die Ausführung der Deckbewegung $C_{\frac{2\pi}{2}, n}$ liefert

neue Lagen der Axenarten A und B, nämlich so, dass in der Hauptebene eine zu L parallele Linie L_1 in kongruenter Weise wie L mit Axenschnittpunkten besetzt ist. Jetzt trifft jede von einem auf L gelegenen Axenpunkt aus nach C gelegte Gerade, um sich selbst verlängert, eine der Ausgangsaxe gleiche Axe. Diejenige unter allen durch L gehenden Axen, welche bei C am nächsten liegt, habe von C den Abstand a''. — Die auf L_1 vorhandenen Axen fordern noch andere, welche eine Gerade L_2 in kongruenter Weise wie L besetzen, und es liegt L_2 so zu L_1, wie L_1 zu L. In gleicher Weise findet man unendlich viele analog besetzte Linien L.

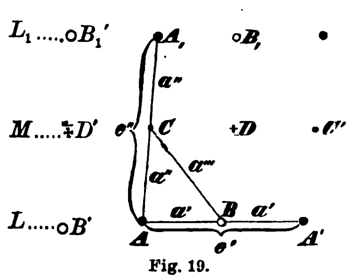


Fig. 19.

— Ferner ergiebt sich aus den 2 gleichen Axen A und A' nach Hülfssatz II nebst Zusatz die Existenz einer Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene $= AA' = 2a'$ ist; sie ist nach Hülfssatz IX eine Deckbewegung. Die wiederholte Ausführung dieser Deckschiebung liefert untereinander gleiche Axen $C', C'', \ldots$, deren Schnittpunkte eine durch C gehende, zu L parallele Gerade M in gleichen Abständen $2a'$ besetzen. Analoge Axen finden sich auf Geraden mitten zwischen je 2 benachbarten Linien L. — Nach Hülfssatz II nebst Zusatz ist ferner eine Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebenen $= 2a'$ ist, nebst der zweizähligen Bewegung um eine Axe C äquivalent einer zweizähligen Bewegung um eine auf M gelegene Axe D, welche um a' von C absteht. Diese Axe muss nach Hülfssatz IX die Axe einer Deckbewegung sein. Folglich sind alle Linien M in Abständen a' abwechselnd mit Axen C und D besetzt. Also folgt:

Satz 38. *Die Gesammtheit der zweizähligen in parallelen Geraden verlaufenden Hauptaxen bestimmt in der Hauptebene ein Netz mit parallelogrammatischen Maschen, und zwar wird jede Masche von 4 ungleich benannten Axen A, B, C, D gebildet.*

Zusatz. *Andere in gleichen Richtungen verlaufende zweizählige Axen, als die so konstruirten, giebt es nicht.*

Beweis. Eine andere zweizählige Axe kann nicht durch eine der Linien L oder M verlaufen, sonst käme ein kleinerer

Axenabstand als a' vor. Ferner kann auch keine Axe zwischen 2 benachbarten Linien L und M liegen, sonst müsste auch eine entsprechende zwischen der Anfangs benutzten Linie L und ihrer Nachbarlinie M sich finden, was unmöglich, weil die auf M befindliche Axe C am nächsten an L sein sollte.

Satz 39. *Das Vorhandensein der bisher ermittelten Axen zieht die Existenz keiner weiteren Axe nach sich.*

Beweis wie bei Satz 27.

Satz 40. *Andere als die bisher konstruirten Axen sind in Punktsystemen mit zweizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung überhaupt nicht möglich.*

Beweis. Weil die Hauptaxen 2-zählig sind, giebt es überhaupt keine anderszähligen Axen; und für sämmtliche zweizähligen von dieser Richtung sind alle möglichen Lagen in Satz 38 enthalten, wie in Zusatz zu 38 bewiesen.

Zusatz. *Bei zweizähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch zweizählige auf ihnen senkrechte Axen.* (Satz 24.) Näheres in Cap. VI.

Satz 41. *Die 4 verschieden benannten zweizähligen Axenarten A, B, C, D sind ungleich.*

Beweis. Wären nämlich zwei benachbarte von ihnen gleich, so müssten sie sich zur Deckung bringen lassen. Dies ist durch Drehung um eine der vorhandenen Axen unerreichbar. Also bleibt nur eine Schiebung a' als Deckbewegung übrig. Aber eine solche, verbunden mit einer zweizähligen Bewegung um eine der beiden Axen, wäre nach Hülfssatz II nebst Zusatz äquivalent der zweizähligen Bewegung um eine mitten zwischen beiden Axen verlaufende parallele Axe, welche also nach Hülfssatz IX die Axe einer Deckbewegung wäre. Eine solche Axe ist jedoch nach dem vorigen Satze unmöglich. Also sind jene Axen undeckbar, d. h. ungleich.

Erklärung. *In einem Punktsystem, dessen Axen in lauter parallelen Geraden verlaufen, heisse Elementardreieck ein in einer Hauptebene liegendes Dreieck, das durch 2 nächste Hauptaxen vom Abstand a' und durch diejenige dritte Hauptaxe bestimmt ist, die so liegt, dass das entstehende Dreieck einen möglichst kleinen Umfang hat.* Z. B. $AA'A''$ in Fig. 16,

ABB' in Fig. 17, ABC in Fig. 18 und 19. Diese 3 Hauptaxen sind im Allgemeinen ungleich. Bei zweizähligen Axen sind zwei Seiten des Elementardreiecks $= a'$ und a'', die dritte heisse a'''. Ferner ist hier $e' = 2a'$, $e'' = 2a''$, $e''' = 2a'''$. Vgl. Fig. 19. — Die ganze Hauptebene ist mit lückenlos aneinanderliegenden Elementardreiecken erfüllt.

Elementarparallelogramm heisst ein aus 2 aneinanderliegenden Elementardreiecken gebildetes Parallelogramm. Bei ein und demselben Punktsystem mit *zweizähliger* Hauptaxe kann es im Allgemeinen 3 verschiedene Gestalten haben, weil zur Herstellung des Parallelogramms das zweite Dreieck an jede der 3 Seiten des ersten Elementardreiecks angelegt werden kann. (CDB_1A_1, CDA_1B_1', A_1CBD in Fig. 19.)

§ 10. Allgemeine Sätze über Punktsysteme mit einer einzigen Axenrichtung.

Satz 42. *In Punktsystemen mit Hauptaxen von einer einzigen Richtung existirt eine Deckschiebung, deren Projektion auf die Hauptebene mit dem Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfällt.*

Beweis. In den Systemen mit 3-, 4-, oder 6-zähliger Hauptaxe ist die Anordnung der Axen nach § 9 (1, 2, 3) eine solche, dass in der Hauptebene 2 nächste gleiche Hauptaxen die Grundlinie e eines gleichschenkligen Dreiecks bestimmen, dessen Winkel an der Spitze gleich dem die Hauptaxe charakterisirenden Drehwinkel ist, und dessen Spitze selbst durch eine, nur bei sechszähligen Axen mit den vorigen gleiche, Hauptaxe H hindurchgeht. Bei zweizähliger Hauptaxe rückt die Spitze in die Mitte der Basis hinein (§ 9, 4). Nun ist die n-zählige Schraubung um die durch die Spitze gehende Axe H nach Hülfssatz II nebst Zusatz äquivalent einer gleichen und gleichsinnigen Schraubung um die durch eine Basisecke gehende Axe H', gefolgt von einer Schiebung parallel und gleich der Basis e. Die charakteristische Deckbewegung um H' ist im Allgemeinen nicht identisch mit der im vorliegenden Falle um H' auszuführenden Schraubung; jedoch haben beide dieselbe Drehungskomponente. Also kann man die verlangte Schraubung ersetzen durch die für H' charakteristische Schraubung und eine

gewisse Schiebung längs der Axe. Letztere Schiebung setzt sich mit der parallel zur Basis des Dreiecks auszuführenden Schiebung e zusammen zu einer einzigen (nach Hülfssatz I), deren Projektion auf die Hauptebene mit e zusammenfällt. Also ist die gegebene Schraubung um H äquivalent mit der charakteristischen Schraubung um H', nebst einer Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene $= e$ ist. Erstere beide Schraubungen sind Deckbewegungen des Systems, also ist (nach Hülfssatz IX) auch diese Schiebung eine Deckbewegung.

Zusatz 1. *Bei zweizähliger Hauptaxe existiren Deckschiebungen, deren Projektionen auf die Hauptebene mit den verdoppelten Seiten des Elementardreiecks (siehe Seite 74 und 75)* e', e'', e''' *zusammenfallen.*

Zusatz 2. *Wenn die durch die Spitze und die Grundecken des gleichschenkligen Dreiecks (vergl. Beweis des Satzes 42) gehenden Hauptaxen einander gleich sind, — was nur bei 6-zähliger Hauptaxe der Fall ist, — so ist die Dreiecksbasis selber eine Deckschiebung.*

Beweis. Denn dann sind die charakteristischen Schraubungen um H und H' einander gleiche Deckbewegungen.

Satz 43. *Eine Deckschiebung, deren Projektion auf die Hauptebene kleiner als die Entfernung* e *zweier nächsten gleichen Hauptaxen wäre, ist unmöglich.*

Beweis. Denn eine solche würde zu den vorher ermittelten noch neue Lagen der Hauptaxe fordern, was unmöglich ist.

Satz 44. *Der Abstand eines Systempunkts* P *von der nächsten Hauptaxe* A *kann nicht grösser als der Radius* r *des um das Elementardreieck beschriebenen Kreises sein.*

Beweis. Weil eine Hauptebene durch lückenlos aneinanderliegende Elementardreiecke erfüllt wird, so muss ein beliebiger Systempunkt P entweder in die Fläche oder auf die Umgrenzung eines Elementardreiecks der durch P gelegten Hauptebene fallen. Liegt P im Mittelpunkt des um das Elementardreieck beschriebenen Kreises, so ist sein Abstand von jeder der 3 nächsten Hauptaxen $= r$; liegt P aber nicht im Mittelpunkt, so muss es sich in einem der 3 das Elementardreieck zusammensetzenden Theildreiecke befinden, welche 2 Radien und eine Elementardreiecksseite zu Seiten haben. Dann ist die Summe seiner Abstände von den 2

nächsten Ecken des Elementardreiecks $< 2r$; also einer dieser beiden Abstände jedenfalls $< r$.

Zusatz. *Bei Systemen mit 6-, 4-, 3-zähliger Hauptaxe ist der Radius des um das Elementardreieck beschriebenen Kreises bezüglich* $= \frac{e}{\sqrt{3}}, \frac{e}{2}, \frac{e}{3}$, *wo e den Abstand zweier nächsten gleichen Hauptaxen bedeutet* (Fig. 16, 17, 18).

Nämlich das Elementardreieck ist bei Systemen mit sechszähliger Hauptaxe gleichseitig und hat die Seite e; bei Systemen mit vierzähliger Hauptaxe ist es rechtwinklig gleichschenklig und hat die Seiten a, a und e, wo a der Abstand zweier nächsten (und zwar ungleichen) Hauptaxen; bei Systemen mit dreizähliger Hauptaxe ist es gleichseitig, jedoch von 3 ungleichen Hauptaxen gebildet (Seite a), und e ist $=$ der doppelten Höhe dieses Dreiecks.

Satz 45. *In Punktsystemen mit einer einzigen Axenrichtung können alle Systempunkte nur auf den Mänteln von Kreiscylindern liegen, die mit gleichen Radien um die eine Art von Hauptaxen konstruirt sind.*

Beweis. P sei ein Punkt des Systems, und A die ihm nächste Hauptaxe, der Abstand beider heisse AP. Dann folgt aus der Regelmässigkeit des Systems, dass bei jedem Systempunkt eine gleiche Hauptaxe A in gleicher Entfernung AP vorübergehn muss. In kleinerer Entfernung kann bei keinem Punkt eine gleiche Hauptaxe vorübergehn; sonst müsste dies ja auch bei P der Fall sein, und dies ist gegen die Voraussetzung. Daher befinden sich alle Systempunkte in denselben Abständen AP von gleichen Hauptaxen, also auf den Mänteln von Kreiscylindern um sie.

Satz 46. *Die Projektionen sämmtlicher Punkte eines unbegrenzten regelmässigen „Punktsystems mit n-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung" auf eine Hauptebene bilden die Ecken von lauter parallelen kongruenten regulären n-ecken, deren Centra in den Schnittpunkten der einen Art von Hauptaxen A liegen. Im Falle zweizähliger Hauptaxen treten für die n-ecke begrenzte gerade Linien (Zweiecke) ein.* (Fig. 20 und 21.)

Beweis. Weil alle Systempunkte auf den Mänteln gleicher Cylinder um die eine Art von Hauptaxen liegen (Satz 45), so müssen sich die Projektionen sämmtlicher Punkte auf eine Hauptebene auf den Peripherien gleicher Kreise befinden, die

um die Schnittpunkte dieser Art von Hauptaxen mit dem Radius AP beschrieben sind. Zugleich erhellt aus dem Beweise des vorigen Satzes, dass kein Abstand eines Systempunktes von einer Hauptaxe vorkommt, der kleiner wäre als der Radius dieser Kreise. — Durch wiederholte Ausführung der charakteristischen n-zähligen Bewegung um eine dieser Hauptaxen entspringen aus einem anfänglich gegebenen Systempunkt noch andere Systempunkte, deren Projektionen sämmtlich in die Ecken eines regulären n-ecks (oder bei $n = 2$ in die Endpunkte eines Durchmessers) fallen. So müssen alle Schnittpunkte gleicher Hauptaxen mit Projektionspunkten umgeben sein, welche lauter regelmässige kongruente n-ecke bestimmen. Diese n-ecke stehn sämmtlich parallel, denn nach Satz 42 besitzt das System Deckschiebungen, deren Projektionen auf eine Hauptebene mit den Abständen e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfallen. — Hiernach bleibt nur noch zu beweisen, dass das System keinen Punkt enthält, der sich anderswohin als in einen Eckpunkt eines solchen n-ecks projicirt.

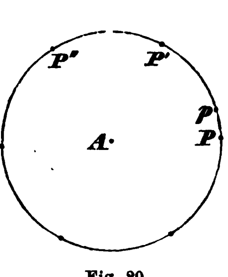


Fig. 20.

Angenommen es gäbe solch einen anderen Systempunkt, so muss seine Projektion p doch jedenfalls auf eine der Kreisperipherien fallen; und P sei der nächste Eckpunkt des demselben Kreise zugehörigen regulären n-ecks. In Folge der Regelmässigkeit des Systems müssen sich nun 2 solche Systempunkte, von denen P und p die Projektionen sind, zur Deckung bringen lassen, so dass zugleich das ganze bewegliche System mit dem festen zur Deckung kommt. Die dazu erforderliche Deckbewegung ist nun jedenfalls keine n-zählige Bewegung um die nächste Hauptaxe, denn der Bogen Pp ist $< \frac{2\pi}{n}$. Noch weniger ist die Deckung durch n-zählige Schraubung um eine entferntere Hauptaxe erreichbar, weil der alsdann anzuwendende Drehwinkel noch kleiner sein müsste. Wollte man aber eine Schraubung um eine der minderzähligen Axen anwenden, so führte diese die Hauptaxe A in eine andere Lage A', und die sämmtlichen auf ihrem Cylindermantel gelegenen Systempunkte in die ent-

sprechend um A' gelegenen Punkte. Wäre nun hierbei auch wirklich P in p geführt, so wäre doch p als zu dem um A' konstruirten n-eck gehörig anzusehn, so dass dennoch die ganze Projektionsfigur nur aus kongruenten n-ecken um die eine Art von Hauptaxen bestände, und p kein neu hinzukommender Punkt wäre. — Nachdem so gezeigt ist, dass keine mit Drehung verbundene Bewegung die Punkte P und p zur Deckung bringen kann, bleibt als Deckbewegung nur noch eine Schiebung übrig, deren Projektion auf die Hauptebene $= Pp$ ist. Diese Möglichkeit wird zunächst bei Systemen mit 6-, 4-, oder 3-zähliger Hauptaxe zurückgewiesen, nachher erst bei denen mit zweizähliger. Bei den erstgenannten Systemen kann $\overline{Pp}$ höchstens gleich der Seite des regulären 12-, 8- oder 6-ecks sein, das in den Kreis mit Radius AP eingeschrieben ist; also kann hier Pp nicht grösser als AP sein. AP aber ist nach Satz 44 höchstens $= r$, und somit (44, Zusatz) höchstens bezüglich $= \frac{e}{\sqrt{3}}, \frac{e}{2}, \frac{e}{3}$, also sicher $< e$. Somit wäre jene Deckschiebung eine solche, deren Projektion auf die Hauptebene kleiner als e wäre; und das ist nach Satz 43 unmöglich. — Bei Systemen mit zweizähliger Hauptaxe muss die fragliche Deckschiebung die durch eine und dieselbe Gerade L gehenden Axen entweder mit den gleichen durch L_1 gehenden Axen, oder mit sich selbst zur Deckung bringen (vergl. Fig. 19); denn neue Axenlagen sind ausgeschlossen. Nun kann Pp höchstens gleich der Seite des in den Kreis mit Radius r eingeschriebenen Quadrats, d. h. $= r \,.\, \sqrt{2}$, sein. Es ist aber die kleinste Schiebung, welche die Axen auf L mit denen auf L_1 zur Deckung bringt, $= 2a''$. Und es ist $2r < a' + a''$, also erst recht $< 2a''$; also ist $r \,.\, \sqrt{2} < 2a''$. Folglich ist Pp nicht gross genug, um eine Deckschiebung sein zu können, die L in L_1 überführt. Sollte schliesslich Pp eine solche Deckschiebung sein, welche die durch ein und dieselbe Linie L gehenden Axen mit sich zur Deckung bringt, so müsste sie parallel L und $= m \,.\, e' = m \,.\, 2a'$ sein, wo m eine ganze Zahl. Projicirt man jetzt (Fig. 21) P und p orthogonal auf L, so sind die

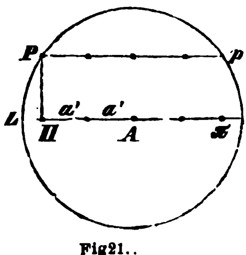


Fig21..

Projektionen Π und π beiderseits um $m \, . \, a'$ vom Kreiscentrum A entfernt, müssen also in dort vorhandene Axenschnitte A oder B fallen. Weil nun $P\Pi < PA$, so wäre nicht A, sondern die durch Π gehende Axe die nächste Hauptaxe an P; und das ist gegen die Voraussetzung. Hiernach ist auch bei zweizähliger Hauptaxe kein andrer Systempunkt möglich als ein solcher, der sich in die Ecken des n-ecks, welches hier ein Zweieck ist, projicirt.

Erklärung. Führt man die Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ wiederholt aus, so wird ein Anfangs in's Auge gefasster Systempunkt, dessen Abstand von der Axe A so klein als möglich ist, nacheinander in Lagen geführt, die so auf einer Schraubenlinie liegen, *dass sich je n äquidistante Punkte auf einem Schraubenumgang befinden. Nun soll die Gesammtheit aller Punkte, die durch beliebig oft zu wiederholende Ausführung der Deckbewegung* $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ *aus einem so nah als möglich bei der Axe A gelegenen Punkt hervorgehn, eine n-punktenschraube heissen.* In einer solchen ist der Abstand irgend eines Punktes von dem $n+1$ten auf ihn folgenden Punkte parallel der Axe und $= n \, . \, l$; er misst die Höhe eines Schraubenganges. — Um einen bestimmten Fall im Auge zu haben, setze man die Schraubung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ immer als *rechtsgewunden* voraus; und zwar heisse, übereinstimmend mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, *rechtsgewunden eine solche Schraube, die (für einen Beobachter, der mit seiner Längsaxe in der Schraubenaxe liegt) durch Umlauf eines Punktes im Uhrzeigersinn, unter gleichzeitiger Senkung des Punktes, beschrieben wird.* Ein *negativer* Werth der Schiebungskomponente l entspricht also einer *Hebung*, bei Umlauf im Uhrzeigersinn, d. h. einer *Linksschraube.*

Satz 47. *In einem Punktsystem mit n-zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung giebt es zur Axenrichtung parallele Deckschiebungen. Die kleinste derselben hat die Grösse* $\lambda = \frac{n \, . \, l}{p}$, *wo p eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... n ist, und l die kleinste aller Schiebungskomponenten bedeutet, welche zu den um die Hauptaxen ausführbaren Deckschraubungen gehören.*

Beweis. Die n-zählige Deckschraubung mit kleinster zu-

gehöriger Schiebungskomponente sei $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$; dann existirt um jede Hauptaxe A eine n-punktschraube. Nun seien unter allen Punkten des Systems, deren Projektionen auf die Hauptebene in ein und dieselbe Ecke eines regulären n-ecks fallen (vergl. Satz 46), 2 nächste um λ voneinander entfernt. Dann ist die einzige Deckbewegung, welche einen dieser Punkte in den anderen zu führen vermag, die der Axe parallele Schiebung λ. Führt man diese Deckschiebung λ hinreichend oft nacheinander aus (p mal), so muss ein in's Auge gefasster Punkt schliesslich einmal gerade die Höhe eines Schraubengangs durchlaufen haben. Denn um die Schraubenhöhe vom Ausgangspunkt P entfernt befindet sich (nach den Bemerkungen zur vorhergehenden Erklärung) ein Punkt Q des Systems; derjenige Punkt nun, der durch p-malige Schiebung λ aus P hervorgegangen ist, kann von Q nicht um *mehr* als λ abstehn, sonst hätte man die Deckschiebung λ nur noch nicht oft genug (oder schon zu oft) ausgeführt; er kann aber von Q auch nicht um weniger als λ abstehn, sonst wäre λ nicht mehr die kleinste Deckschiebung in dieser Richtung, was doch vorausgesetzt war. Also muss

$$p \, . \, \lambda = n \, . \, l$$

sein, wo $n \, . \, l$ die Höhe des Schraubenganges ist. Wäre nun die ganze Zahl $p > n$, so hätte die den 2 Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ und $-\lambda$ zusammen äquivalente Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{n}, l-\lambda}$, d. h. $A_{\frac{2\pi}{n}, l-\frac{n}{p}l}$ eine Schiebungskomponente, die kleiner als l wäre; und das ist gegen die Voraussetzung.

Zusatz 1. *Folglich stehn um alle Hauptaxen der einen Art die ihr nächsten Systempunkte in der Weise herum, dass jede Kante eines über einem regelmässigen n-eck stehenden geraden Prismas in gleichen Abständen λ mit Systempunkten besetzt ist. Die Gesammtheit der Punkte auf einem solchen Prisma bildet p kongruente n-punktschrauben, die auf demselben Cylindermantel, gleichweit voneinander abstehend, ineinander gewunden sind. Und weil (nach Satz 42) stets eine Deckschiebung existirt, deren Projektion auf eine Hauptebene in den Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen fällt, so sind alle inein-*

ander gewundenen Schrauben des einen Cylindermantels parallel den entsprechenden jedes anderen Cylindermantels.

Zusatz 2. *Aus den Sätzen 46 und 47 folgt unmittelbar, dass andere Punkte als die im vorigen Zusatz 1 aufgezählten, in Systemen mit einer einzigen Axenrichtung überhaupt unmöglich sind.*

§ 11. Konstruktion der Systeme mit sechszähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{6}, l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung auf eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus den Ecken kongruenter paralleler regelmässiger Sechsecke, deren Mitten in den Hauptaxen liegen, und daher nach Satz 26 (Fig. 16) ein Netz von gleichseitig dreieckigen Maschen bilden. Alle Sechsecke können in der Hauptebene beliebig um ihre Mitten gedreht werden, wofern sie nur untereinander parallel bleiben (Fig. 22). Die Punkte, welche auf dem eine Hauptaxe zunächst umgebenden Cylindermantel liegen, gehn durch die parallel einer Maschenseite ausgeführte *Schiebung* e $(= a)$, welche nach Zusatz 2 zu 42 eine Deckbewegung ist, in die entsprechenden Punkte auf dem Cylindermantel der Nachbaraxe über. Also befinden sich die Systempunkte aller Cylindermäntel in gleicher Lage gegen eine und dieselbe Hauptebene. — Für die *der Axe parallele kleinste Deckschiebung* λ gilt nach Satz 47 die Gleichung:

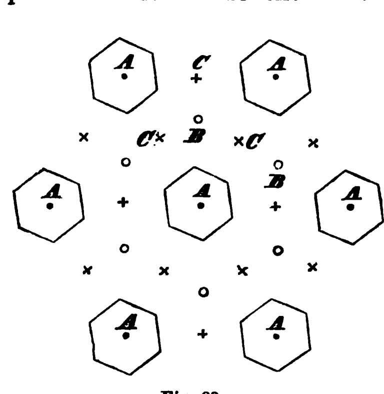


Fig. 22.

$$p \cdot \lambda = . \, 6l.$$

Wenn man hier p nacheinander die Werthe 1, 2, ... 6 giebt, erhält man 6 verschiedene Systeme.

1) *Bei* $p = 1$ wird $l = \frac{\lambda}{6}$; also sind die dieses Punktsystem charakterisirenden Deckbewegungen folgende: $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{6}}$,

λ, e. Die beiden ersten dieser Deckbewegungen charakterisiren eine einfache Sechspunktschraube. Das somit abgeleitete *rechte 6-punktschraubensystem*[1]) (Taf. III. Fig. 42) besteht aus lauter parallelen kongruenten 6-punktschrauben, die sich durch eine senkrecht zur Axe ausgeführte Schiebung e ($= a$) zur Deckung bringen lassen, und deren Axen in der Hauptebene ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bestimmen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten Punktgittern von gleichseitig dreieckiger Masche besetzt. Die Deckbewegungen um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$.

2) *Bei* $p = 2$ wird $l = \frac{2\lambda}{6}$; es entsteht das *zweigängige rechte 6-punktschraubensystem*[2]) (Taf. IV. Fig. 44) mit den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{3}}$, λ, e. Hiervon charakterisiren die beiden ersten (nach Satz 47, Zusatz) 2 kongruente ineinander gewundene 6-punktschrauben mit der Schraubenhöhe 2λ, ausgehend von 2 diametral gegenüber liegenden Punkten des Schraubencylinders, so dass mitten zwischen je 2 um die Schraubenhöhe von einander abstehenden Punkten der einen Schraube ein Punkt der anderen liegt. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt, doch ist jede folgende gegen die vorhergehende um 60^0 um eine sechszählige Axe gedreht. Während also die eine Hauptebene mit Punktpaaren 1, 1 besetzt ist, gelegen wie die Endpunkte der einen Schaar paralleler grosser Durchmesser der Projektionssechsecke, so tragen die beiden folgenden Hauptebenen Punktpaare 2, 2 und 3, 3, gelegen wie die Endpunkte der zweiten und dritten Durchmesserschaar. Die Hauptaxen A sind zugleich zweizählige Drehungsaxen; die Deckbewegungen um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ und $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) *Bei* $p = 3$ wird $l = \frac{3\lambda}{6}$; es entsteht das *dreigängige 6-punktschraubensystem*[3]) (Taf. IV. Fig. 46) mit den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, e. Hier-

1) früher: rechtes sechszähliges Schraubensystem.
2) früher: Wendeltreppensystem.
3) früher: Sternsäulensystem.

von charakterisiren die beiden ersten 3 kongruente ineinander gewundene 6-punktschrauben mit der Schraubenhöhe 3λ, ausgehend von den auf dem Schraubencylinder liegenden Ecken eines, in eine Hauptebene fallenden, gleichseitigen Dreiecks, so dass die Höhe eines Schraubenganges durch 2 zwischenliegende Punkte der beiden anderen Schrauben gedrittheilt wird. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt; die abwechselnden von ihnen tragen Punkte in den Ecken von kongruenten parallelen gleichseitigen Dreiecken, deren Mitten in den Hauptaxen liegen; die zwischenliegenden tragen ebensolche Dreiecke, jedoch um 60^0 gegen die vorige Lage gedreht. Die Hauptaxen A sind zugleich dreizählige Drehungsaxen; die Deckbewegungen um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$.

4) *Bei* $p = 4$ wird $l = \frac{4\lambda}{6}$. Von den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{2\lambda}{3}}$, λ, e charakterisiren die beiden ersten 4 kongruente ineinander gewundene 6-punktschrauben; jedoch lassen die letzteren sich noch einfacher auffassen. Man setze nämlich die beiden Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{2\lambda}{3}}$ und $-\lambda$ zu einer einzigen: $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{2\lambda}{3} - \lambda}$ oder $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{3}}$ zusammen, so erscheinen folgende Deckbewegungen als die das System charakterisirenden: $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{3}}$, λ, e. Sie unterscheiden sich von denen des zweigängigen rechten 6-punktschraubensystems nur dadurch, dass die Schiebungskomponente der Schraubung negativ ist, wodurch eine Schraubung von entgegengesetztem Windungssinn als vorher charakterisirt ist. Um jede Hauptaxe finden sich also zwei 6-punktschrauben linken Windungssinnes ineinandergewunden; somit ist das System das

zweigängige linke 6-punktschraubensystem. Abgesehn vom Windungssinne der Schrauben stimmt es mit dem zweigängigen rechten Schraubensystem völlig überein.

5) *Bei* $p = 5$ wird $l = \frac{5\lambda}{6}$. Von den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{5\lambda}{6}}$, λ, e charakterisiren die beiden ersten 5 kongruente ineinandergewundene 6-punktschrauben. Indem

aber durch Zusammensetzung der Schraubung mit der Deckschiebung $-\lambda$ eine Schraubung $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{6}}$ als Deckbewegung resultirt, so zeigen sich folgende Deckbewegungen als die charakteristischen: $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{6}}$, λ, e. Das hiermit charakterisirte System ist das

linke 6-punktschraubensystem. Es besteht aus lauter kongruenten parallelen einfachen 6-punktschrauben von linkem Windungssinn. Abgesehn vom Windungssinn der Schrauben stimmt es mit dem rechten Schraubensystem völlig überein.

6) *Bei* $p = 6$ wird $l = \lambda$; es entsteht das

Hexagonalsäulensystem[1]) (Taf. IV. Fig. 47). Nämlich von den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \lambda}$, λ, e kann man die erste mit der negativ genommenen zweiten zu einer einzigen Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{6}, \lambda - \lambda}$ oder $A_{\frac{2\pi}{6}, 0}$ zusammenfassen, welche nichts anderes als eine sechszählige Drehung ist. Also sind jetzt die charakteristischen Bewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, 0}$, λ, e. Statt also jede Hauptaxe von 6 ineinandergewundenen 6-punktschrauben umgeben anzusehen, fasst man das System einfacher als aus Punkten gebildet auf, welche die Kanten von lauter kongruenten, parallelen, sechsseitigen Prismen in gleichen Abständen und immer bei allen in gleicher Höhe über einer und derselben Hauptebene besetzen. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt; alle tragen zu regulären kongruenten Sechsecken angeordnete Punkte. Fig. 47 auf Taf. IV stellt unmittelbar eine solche Hauptebene vor. — Die Deckbewegungen um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) und 2) Rechtes und linkes 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm\frac{\lambda}{6}}$, λ, e.

3) und 4) Rechtes und linkes zweigängiges 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm\frac{\lambda}{3}}$, λ, e.

---

1) früher: System der sechsseitigen Säule.

5) Dreigängiges Sechspunktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6},\frac{\lambda}{2}}, \lambda, e.$

6) Hexagonalsäulensystem. $A_{\frac{2\pi}{6},0}, \lambda, e.$

§ 12. Konstruktion der Systeme mit vierzähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{4},l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung auf eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus den Ecken kongruenter paralleler Quadrate, deren Mitten in der einen Art von Hauptaxen A liegen, und daher nach Satz 29 (Fig. 17) ein Netz von quadratischen Maschen bilden. Alle Quadrate können in der Hauptebene beliebig um ihre Mitten gedreht werden, wofern sie nur unter einander parallel bleiben (Fig. 23). Für die der Axe parallele kleinste Deckschiebung λ gilt nach Satz 47 die Gleichung

$$p \,.\, \lambda = 4 \,.\, l,$$

worin p nacheinander die Werthe 1, 2, 3, 4 annehmen kann.

1) *Bei* $p = 1$ wird $l = \frac{\lambda}{4}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{4}}$ und λ charakterisiren eine Vierpunktschraube (Taf. II. Fig. 26).

Fig. 23.

2) *Bei* $p = 2$ wird $l = \frac{2\lambda}{4}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$ und λ bestimmen 2 ineinandergewundene kongruente 4-punktschrauben mit der Schraubenhöhe 2λ, ausgehend von 2 diametral gegenüber liegenden Punkten des Schraubencylinders. Die Verbindungslinie des um $\frac{\lambda}{2}$ höher gelegenen Punktpaars kreuzt die Verbindungslinie des Ausgangspaars rechtwinklig im Raum (Taf. III. Fig. 29).

3) *Bei* $p = 3$ wird $l = \frac{3\lambda}{4}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{3\lambda}{4}}$ und λ charakterisiren eine entgegengesetzt gewundene, also

linke Vierpunktschraube; denn die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit der Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{3\lambda}{4}}$ zu der Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}$ zusammen.

4) *Bei $p = 4$* wird $l = \lambda$. Die Bewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \lambda}$ und λ charakterisiren die Ecken einer quadratischen Säule. Nämlich die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit $A_{\frac{2\pi}{4}, \lambda}$ zu der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$ zusammen, welche eine Drehung ist.

In jedem dieser Fälle sind zwar die ineinandergewundenen 4-punktschrauben des einen Cylindermantels den entsprechenden eines jeden anderen parallel (Zusatz 1 zu 47); indessen ist die Stellung der Schrauben der verschiedenen Cylindermäntel gegeneinander dadurch noch nicht genügend bestimmt; sie wird jetzt ermittelt. Die Anwendung von Hülfssatz II nebst Zusatz auf 2 gleiche nächste Hauptaxen A lehrt, in Verbindung mit Hülfssatz IX, dass eine zur Axe senkrechte Schiebung $2a$ (welche die Basis eines durch 3 Axen A bestimmten gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten e, e, $2a$ ist), eine Deckbewegung ist (Fig. 17). Daraus folgt, *dass die Cylindermäntel aller abwechselnden gleichen Hauptaxen A mit Punkten besetzt sind, die sich in einerlei Lage gegen eine und dieselbe Hauptebene befinden. Also ist auch die senkrecht zur Axenrichtung auszuführende Schiebung $2e$,* welche 2 abwechselnde gleiche Hauptaxen A ineinanderführt, *eine Deckbewegung.*

Es erübrigt noch, die Stellung der Schrauben auf den Cylindermänteln der einen Hälfte gleicher Hauptaxen A gegen diejenigen auf der anderen Hälfte zu ermitteln. Das gelingt so (Fig. 24). Nach Satz 42 existirt eine Deckschiebung s, deren Projektion auf eine Hauptebene mit dem Abstande e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfällt. Ihre Projektion auf die Axenrichtung heisse c. Nun ist mit der Deckschiebung $2s$ äquivalent die Reihenfolge der beiden Schiebungen $2e$ und $2c$ (Hülfssatz I). Weil aber, wie eben gezeigt, $2e$ ebenfalls eine Deckbewegung ist, so ist (nach Hülfssatz IX) auch $2c$ eine

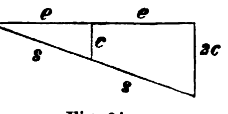


Fig. 24.

Deckbewegung. Andererseits ist λ als kleinste, der Axe parallele, Deckschiebung bekannt. Also muss

$$2 \,.\, c = q \,.\, \lambda, \text{ d. h. } c = \frac{q}{2} \cdot \lambda$$

sein, wo q eine ganze Zahl oder 0. a) Ist nun q *eine gerade Zahl oder 0*, so wird c ein ganzes Vielfaches von λ, oder 0, und folglich ist dann c selbst eine Deckschiebung. Weil jetzt von den beiden Komponenten c und e der gegebenen Deckschiebung s die eine als Deckbewegung erkannt ist, so muss (nach Hülfssatz IX) auch die andere eine sein. *In diesem Falle ist also der Abstand c zweier nächsten gleichen Hauptaxen eine Deckschiebung.* Da die der Axe parallele Komponente derselben $= 0$ ist, so lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = 0$ darstellen.

b) *Ist ferner q eine ungerade Zahl* $= 2r + 1$, so führe man nacheinander die beiden Deckschiebungen s und $-r\lambda$ aus; sie sind zusammen äquivalent einer gewissen Deckschiebung σ, deren zur Axe parallele Komponente $= \frac{2r+1}{2}\lambda - r\lambda$, d. h. $= \frac{\lambda}{2}$ ist, während die in die Hauptebene fallende Komponente $= e$ ist. Keine dieser beiden Komponenten ist für sich eine Deckbewegung, sondern nur die ihnen äquivalente Bewegung σ. Weil die der Axe parallele Komponente derselben $= \frac{\lambda}{2}$ ist, so lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = \frac{\lambda}{2}$ darstellen.

In jedem der vorher ermittelten 4 Fälle (wo 1 bis 4 Schrauben ineinandergewunden sind), kann nun entweder die Deckschiebung e (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = 0$), oder eine Deckschiebung σ (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = \frac{\lambda}{2}$, und der in die Hauptebene fallenden Komponente e) vorhanden sein. Die somit sich ergebenden 8 verschiedenen Fälle reduciren sich auf nur 6 wesentlich verschiedene. Zum Zweck dieser Reduktion ist es nützlich, auch die um die anderen Hauptaxen B vorhandenen Deckschraubungen zu ermitteln. Die 2 Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, t}$ und σ (mit den Komponenten c und e) sind, nach Hülfssatz II nebst

Zusatz, zusammen äquivalent einer Deckschraubung $B_{\frac{2\pi}{4}, l+c}$, und weil c nur die Werthe 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ haben kann, und auch $\pm\lambda$ eine der Axe parallele Deckschiebung ist, so existirt um B jedenfalls die Deckbewegung $B_{\frac{2\pi}{4}, l \pm c}$. Hiernach hat man folgende Fälle.

1a) $p = 1$, $c = 0$. Die charakteristischen Deckbewegungen sind $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$, λ, e $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}\right)$; sie bestimmen das

rechte Vierpunktschraubensystem[1]) (Taf. II. Fig. 26). Es besteht aus lauter parallelen kongruenten 4-punktschrauben, die sich durch senkrecht zur Axe ausgeführte Schiebungen e zur Deckung bringen lassen; ihre Axen bestimmen in der Hauptebene ein Netz quadratischer Maschen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten Punktgittern von quadratischer Masche besetzt. Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$.

1b) $p = 1$, $c = \frac{\lambda}{2}$. Die charakteristischen Deckbewegungen sind $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$, λ, σ $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}\right)$; sie bestimmen das

vierzählige Gegenschraubensystem (Taf. II. Fig. 28). Es lässt sich ansehn als aus 2 kongruenten Schraubensystemen bestehend, die parallelaxig so ineinanderstehn, dass die Schraubenaxen des einen mitten zwischen je 4 solchen des anderen verlaufen, und dass das eine System gegen das andere um die halbe Schraubenhöhe gehoben ist. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt und folgen in Abständen $\frac{\lambda}{4}$ aufeinander; jede trägt 2 kongruente parallele, beliebig ineinander gestellte, quadratmaschige Punktgitter, doch ist die Besetzung jeder folgenden gegen die vorige um 90° gedreht. Die Symbole der Deckschraubungen um A und B zeigen, dass beide Schraubungen entgegengesetzten Windungssinn haben. In der That bemerkt man in Taf. II. Fig. 28, dass die einander zugewandten Punkte von 4 zunächst um B herumstehenden Schrauben A eine entgegengesetzt gewundene Vierpunkt-

1) früher: rechtes vierzähliges Schraubensystem.

schraube um B bilden, mit derselben Schraubenhöhe wie die vorigen. — Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

2a) $p = 2$, $c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, e $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}\right)$ charakterisiren das

zweigängige 4-punktschraubensystem[1]) (Taf. III. Fig. 29). Es besteht aus lauter parallelen kongruenten zweigängigen Schrauben (jede aus 2 ineinandergewundenen 4-punktschrauben gebildet), die sich durch Schiebung e, senkrecht zur Axe, zur Deckung bringen lassen. Die Hauptebenen folgen in gleichen Abständen $\frac{\lambda}{2}$ aufeinander; die abwechselnden tragen Punktpaare, gelegen wie die Endpunkte der Diagonalen von *einer* Richtung in den Quadraten der Projektionsfigur; die zwischenliegenden Hauptebenen tragen Punktpaare, deren Projektionen in die Endpunkte der anderen Diagonalen derselben Quadrate fallen. — Die Hauptaxen A und B sind zugleich zweizählige Drehaxen, ebenso die Axe C $\left(C_{\frac{2\pi}{2}, 0}\right)$.

2b) $p = 2$, $c = \frac{\lambda}{2}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, σ $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{4}, 0}\right)$ charakterisiren ein System, das mit dem nachher zu besprechenden 4b) wesentlich übereinstimmt (cf. daselbst).

3a) $p = 3$, $c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}$, λ, e $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}\right)$ charakterisiren das

linke 4-punktschraubensystem, das, bis auf den Windungssinn der Schrauben, mit dem rechten Schraubensystem genau übereinstimmt.

3b) $p = 3$, $c = \frac{\lambda}{2}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}$, λ, σ $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}\right)$ charakterisiren wieder ein *Gegenschraubensystem*, das von dem unter 1b) gefundenen nicht wesentlich verschieden ist; denn sobald man die Namen A und B der Hauptaxen vertauscht, sind die Deckbewegungen dieselben.

1) früher: Kreuzsprossensystem.

Der einzige Unterschied ist der, dass die an einem Systempunkt zunächst vorbeigehende Hauptaxe dort rechten Windungssinn, hier linken hat.

4a) $p = 4$, $c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, λ, e (und $B_{\frac{2\pi}{4}, 0}$) charakterisiren das

Quadratsäulensystem (Taf. III. Fig. 30). Es besteht aus Punkten, welche die Kanten von lauter parallelen kongruenten quadratischen Prismen in gleichen Abständen und immer bei allen in gleicher Höhe über einer und derselben Hauptebene besetzen. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt, alle tragen zu kongruenten Quadraten angeordnete Punkte. Die Figur stellt unmittelbar eine solche Hauptebene vor. — Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

4b) $p = 4$, $c = \frac{\lambda}{2}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, λ, σ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$) charakterisiren das

Quadratoktaëdersystem (Taf. III. Fig. 31). Es lässt sich ansehn als aus 2 parallel mitten ineinanderstehenden kongruenten Quadratsäulensystemen bestehend, deren eines gegen das andere um die halbe Säulenhöhe $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ gehoben ist. Zwei Nachbarhauptebenen geben zusammen dieselbe Projektionsfigur wie das ganze System, indem die abwechselnden Quadrate der Fig. 31, Taf. III der einen, resp. der anderen Hauptebene angehören. Die Mitten von 4 nächstbenachbarten Quadraten der einen Hauptebene, und die Mitten derjenigen beiden, in den 2 Nachbarhauptebenen gelegenen, Quadrate, welche sich mitten zwischen die vorigen hinein in ein und dasselbe Quadrat projiciren, bestimmen zusammen ein Quadratoktaëder. — Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$. — Das vorher übergangene System 2b) unterscheidet sich vom vorliegenden nur dadurch, dass die Deckbewegungen um die beiderlei Arten von Hauptaxen A und B vertauscht sind. Dort ist es also nicht die einem Systempunkt nächste Hauptaxe, um welche die Vierpunktschraube angeordnet ist, sondern die fernere.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) und 2) Rechtes und linkes 4-punktschraubensystem.
$A_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}\right).$

3) Vierzähliges Gegenschraubensystem.
$A_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \mp\frac{\lambda}{4}}\right).$

4) Zweigängiges 4-punktschraubensystem.
$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}\right).$

5) Quadratsäulensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, 0}\right).$

6) Quadratoktaëdersystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}\right).$

§ 13. Konstruktion der Systeme mit dreizähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{3}, l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung auf eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus den Ecken kongruenter paralleler gleichseitiger Dreiecke, deren Mitten in der einen Art von Hauptaxen (A) liegen und daher nach Satz 34 (Fig. 18) ein Netz von gleichseitig dreieckigen Maschen bilden. Alle Dreiecke können in der Hauptebene beliebig um ihre Mitten gedreht werden, wofern sie nur untereinander parallel bleiben. (Fig. 25.) Für die der Axe parallele kleinste Deckschiebung λ gilt nach Satz 47 die Gleichung

$$p \cdot \lambda = 3l,$$

worin p nacheinander die Werthe 1, 2, 3 annehmen kann.

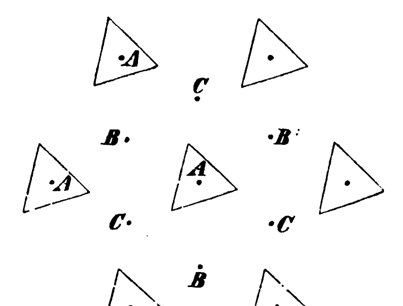


Fig. 25.

1) *Bei* $p = 1$ *wird* $l = \frac{\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$ und λ charakterisiren eine 3-punktschraube (Taf. II. Fig. 15).

2) *Bei $p = 2$ wird $l = \frac{2\lambda}{3}$.* Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\lambda}{3}}$ und λ charakterisiren eine entgegengesetzt gewundene, also linke 3-punktschraube, denn die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit der Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\lambda}{3}}$ zu der Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ zusammen.

3) *Bei $p = 3$ wird $l = \lambda$.* Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \lambda}$ und λ charakterisiren 3 ineinandergewundene 3-punktschrauben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ecken einer gleichseitig dreiseitigen Säule, denn die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit $A_{\frac{2\pi}{3}, \lambda}$ zur Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ zusammen, welche eine Drehung ist.

In jedem dieser Fälle sind die 3-punktschrauben des einen Cylindermantels den entsprechenden eines jeden anderen parallel (Zusatz 1 zu 47); indessen ist die Stellung der Schrauben der verschiedenen Cylindermäntel gegeneinander dadurch noch nicht genügend bestimmt; sie wird jetzt ermittelt. Die Anwendung von Hülfssatz II nebst Zusatz auf 2 gleiche nächste Hauptaxen A lehrt in Verbindung mit Hülfssatz IX, dass eine zur Axe senkrechte Schiebung $3a$ (welche die Basis eines durch 3 Axen B bestimmten gleichschenkligen Dreiecks mit den Seiten e, e, $3a$ ist), eine Deckbewegung ist (Fig. 18). Durch wiederholte Ausführung dieser Deckschiebung in allen für sie möglichen Richtungen folgt, *dass die Cylindermäntel des dritten Theils aller gleichen Hauptaxen A mit Punkten besetzt sind, die sich in einerlei Lage gegen ein und dieselbe Hauptebene befinden. Folglich ist auch die senkrecht zur Axe auszuführende Schiebung $3e$, welche gleich der langen Diagonale der durch den dritten Theil der Axen A bestimmten rhombischen Masche ist, eine Deckbewegung.*

Es erübrigt noch, die Stellung der Schrauben auf den Cylindermänteln des zweiten und dritten Drittheils gleicher Axen A gegen diejenigen auf dem ersten Drittheil zu ermitteln. Das gelingt so (Fig. 26). Nach Satz 42 existirt eine Deckschiebung s, deren Projektion auf eine Hauptebene mit dem Abstande e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfällt. Ihre Projektion auf die Axenrichtung heisse c.

Nun ist mit der Deckschiebung $3s$ äquivalent die Reihenfolge der beiden Schiebungen $3e$ und $3c$. (Hülfssatz I.) Weil aber, wie eben gezeigt, $3e$ auch eine Deckbewegung ist, so ist (nach Hülfssatz IX) auch $3c$ eine solche. Andererseits kennt man λ als kleinste, der Axe parallele, Deckschiebung. Also muss

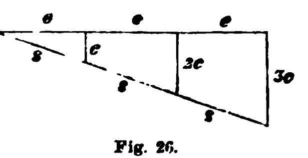


Fig. 26.

$$3c = q \cdot \lambda, \text{ d. h. } c = \frac{q}{3} \cdot \lambda$$

sein, wo q eine ganze Zahl oder 0.

a) *Ist nun q durch 3 theilbar*, so wird c ein ganzes Vielfaches von λ, oder 0, und folglich ist dann c selbst eine Deckschiebung. Weil jetzt von den beiden Komponenten c und e der gegebenen Deckschiebung s die eine als Deckschiebung erkannt ist, so muss es auch die andere sein (nach Hülfssatz IX). *In diesem Falle ist also der Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen eine Deckschiebung.* Die der Axe parallele Komponente derselben ist $= 0$; also lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = 0$ darstellen.

b) *Ist aber q nicht durch 3 theilbar*, so kann es den Rest 1 oder 2 lassen. α) Wenn $q = 3r + 1$ (r = ganze Zahl) ist, so führe man die beiden Deckschiebungen s und $-r \cdot \lambda$ aus; sie sind zusammen äquivalent einer gewissen Deckschiebung σ', deren zur Axe parallele Komponente $= \frac{3r+1}{3} \lambda - r\lambda$, d. h. $= \frac{\lambda}{3}$ ist, während die in die Hauptebene fallende Komponente $= e$ ist. Keine dieser beiden Komponenten ist für sich eine Deckbewegung, sondern nur die ihnen äquivalente Bewegung σ'. Mit Rücksicht auf den Werth der zur Axe parallelen Komponente von σ' lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = \frac{\lambda}{3}$ darstellen.

β) Wenn $q = 3r + 2$ ist, führe man die beiden Deckschiebungen s und $-(r + 1)\,\lambda$ aus; beide sind äquivalent einer gewissen Deckschiebung σ'', deren zur Axe parallele Komponente $= -\frac{\lambda}{3}$ ist, während die zur Hauptebene parallele Komponente $= e$ ist. Dieser Fall ist also darstellbar durch die Bedingung $c = -\frac{\lambda}{3}$.

In jedem der vorher ermittelten 3 Fälle (wo 1 bis 3 Schrauben ineinander gewunden sind), kann nun entweder die Deckschiebung e (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = 0$), oder eine Deckschiebung σ' oder σ'' (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = \pm \frac{\lambda}{3}$, und der in die Hauptebene fallenden Komponente e) vorhanden sein. Die somit sich ergebenden 9 verschiedenen Fälle reduciren sich auf nur 4 wesentlich verschiedene. Für diese Reduktion ist es nützlich, auch die um die anderen Hauptaxen B und C vorhandenen Deckschraubungen zu ermitteln. Hierzu beachte man, dass der Abstand e zweier nächsten gleichen Axen A' und A'' die Basis für 2 kongruente gleichschenklige Dreiecke in der Hauptebene bildet (Fig. 27), deren eins seine Spitze in einer Hauptaxe B, das andre seine Spitze in einer Hauptaxe C hat; und zwar sei hier diejenige Axe als B bezeichnet, die so liegt, dass die Umlaufung des betreffenden gleichschenkligen Dreiecks im Uhrzeigersinn (für den in der Axe stehenden Beobachter) von A' über A'' nach B führt.

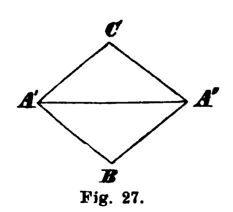


Fig. 27.

Die Deckschiebung σ, deren zur Axe parallele Komponente $= c$ ist, verlaufe von A' nach A'' hin abwärts. Dann sind, nach Hülfssatz II nebst Zusatz, die beiden Deckbewegungen σ und $A'_{\frac{2\pi}{3}, l}$ äquivalent einer Deckschraubung $B_{\frac{2\pi}{3}, l+c}$; und die beiden Deckbewegungen σ und $A''_{\frac{2\pi}{3}, l}$ sind äquivalent einer Deckschraubung $C_{\frac{2\pi}{3}, l-c}$. Würde dagegen die Deckschiebung σ von A' nach A'' hin aufwärts verlaufen, so wäre c durch $-c$ zu ersetzen. Man erkennt somit, *dass unter allen Umständen die Schiebungskomponenten der 3 Schraubungen um die 3 verschiedenartigen 3-zähligen Axen A, B, C die Werthe haben $l - c$, l, $l + c$, wo c einen der Werthe $0, \pm \frac{\lambda}{3}$ besitzt.*

Hiernach hat man folgende Fälle:

1a) *$p = 1$, $c = 0$.* Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$, λ, e, (und $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$, $C_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$) charakterisiren das

rechte 3-punktschraubensystem[1]) (Taf. II. Fig. 15); es besteht aus lauter parallelen kongruenten 3-punktschrauben, die sich durch senkrecht zur Axe auszuführende Schiebungen e zur Deckung bringen lassen, und deren Axen auf der Hauptebene ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bestimmen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten Punktgittern von gleichseitig dreieckiger Masche besetzt.

1 b) $p = 1,\ c = \pm \frac{\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, \lambda, \sigma$ $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, 0}\right.$ für den Fall σ', dagegen $B_{\frac{2\pi}{3}, 0}, C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ für den Fall $\left.\sigma''\right)$ charakterisiren ein System, das von dem unter 3b) zu besprechenden nicht wesentlich verschieden ist.

2 a) $p = 2,\ c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e$ $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{4\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}\right)$ charakterisiren das

linke 3-punktschraubensystem, welches, abgesehn vom Windungssinn der Schrauben, völlig mit dem rechten Schraubensystem übereinstimmt.

2 b) $p = 2,\ c = \pm \frac{\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}, \lambda, \sigma$ $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{3}, 0}, C_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}\right.$ für den Fall σ', dagegen $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ für den Fall $\left.\sigma''\right)$ charakterisiren ein System, das im Wesentlichen mit dem unter 3b) übereinstimmt.

3 a) $p = 3,\ c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \lambda, e$ $\left(\text{und } B_{\frac{2\pi}{3}, 0}, C_{\frac{2\pi}{3}, 0}\right)$ charakterisiren das

dreiseitige Säulensystem (Taf. II. Fig. 17). Es besteht aus Punkten, welche die Kanten von lauter parallelen kongruenten Prismen über gleichseitig dreieckiger Basis in gleichen Abständen und allemal in gleicher Höhe über ein und derselben Hauptebene besetzen. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt; alle tragen zu kongruenten gleichseitigen Dreiecken angeordnete Punkte. Die Figur stellt unmittelbar eine solche Hauptebene vor.

[1] früher: rechtes dreizähliges Schraubensystem.

3b) $p = 3$, $c = \pm \frac{\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, λ, σ (und $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$, $C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ für den Fall σ', dagegen $B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$, $C_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$ für den Fall σ'') charakterisiren

das Rhomboëdersystem (Taf. II. Fig. 18). Durch die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ und λ werden Punkte bestimmt, die auf dreiseitigen Säulen ebenso wie beim vorigen System angeordnet sind. Solche umgeben also sämmtliche Axen A; doch ist ihre gegenseitige Stellung nur allemal um den dritten Theil aller Axen A derartig, dass sie durch eine zur Axe senkrechte Schiebung ineinander übergehn. Die Deckschiebung σ, deren zur Axe parallele Komponente $c = + \frac{\lambda}{3}$ oder $= - \frac{\lambda}{3}$ ist, versetzt die bisjetzt behandelten, zu dreiseitigen Säulen zusammenfassbaren, Punkte sammt den Säulenaxen in das zweite Drittheil von Axen A. Nochmalige Anwendung derselben Schiebung versetzt die eben gefundenen Säulen nebst ihren Axen in die noch übrigen Axen A. Fasst man nur die Mitten der gleichseitigen Dreiecke in's Auge, in deren Ecken die Systempunkte liegen, so bildet ein solcher Mittelpunkt auf A, verbunden 1) mit den um $\frac{\lambda}{3}$ tiefer liegenden 3 Mittelpunkten auf 3 gleichen Nachbaraxen A, sowie 2) mit den um $\frac{2\lambda}{3}$ tiefer liegenden 3 Mittelpunkten auf den anderen 3 gleichen Nachbaraxen A, und endlich 3) mit dem um λ tiefer liegenden Mittelpunkt auf der ursprünglichen Axe, zusammen ein *Rhomboëder*. (Taf. II. Fig. 18.) Das ganze System besteht also aus Punkten, gelegen in den Ecken von lauter kongruenten parallelen gleichseitigen Dreiecken, deren Centra ein rhomboëdrisches Raumgitter bilden. In der Figur, welche die Projektion von 3 aufeinanderfolgenden Hauptebenen, und zugleich die Projektion des ganzen Systems auf eine von ihnen, darstellt, gehören die durch verschieden schattirte Kreise dargestellten Systempunkte resp. den 3 aufeinanderfolgenden Hauptebenen an.

Die vorher übergangenen Systeme 1b) und 2b) unterscheiden sich vom vorliegenden nur dadurch, dass es nicht die einem Systempunkt nächste Axe A ist, um welche die

gleichseitigen Dreiecke angeordnet sind, sondern resp. die Axe C oder B.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) und 2) Rechtes und linkes 3-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\lambda}{3}}\right)$.

3) Dreiseitiges Säulensystem. $A_{\frac{2\pi}{3},0}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{3},0}, C_{\frac{2\pi}{3},0}\right)$.

4) Rhomboëdersystem. $A_{\frac{2\pi}{3},0}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}\right)$.

Hier ist σ eine Deckschiebung, deren zur Axe parallele und senkrechte Comp. resp. $= \frac{\lambda}{3}$ und $= e$ ist.

§ 14. Konstruktion der Systeme mit zweizähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung auf eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus kongruenten parallelen Punktpaaren, deren Mittelpunkte in der einen Art von Hauptaxen A liegen, und daher nach Satz 38 (Fig. 19) ein Netz parallelogrammatischer Maschen bilden (Fig. 28). Alle Punktpaare können in der Hauptebene um ihre Mitten beliebig gedreht werden, wofern sie nur untereinander parallel bleiben. Dabei kann der bemerkenswerthe Specialfall eintreten, dass die Punktpaare in die Maschenseiten hineinfallen.

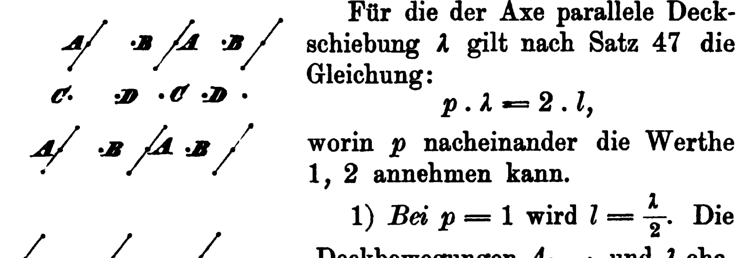


Fig. 28.

Für die der Axe parallele Deckschiebung λ gilt nach Satz 47 die Gleichung:

$$p \cdot \lambda = 2 \cdot l,$$

worin p nacheinander die Werthe 1, 2 annehmen kann.

1) *Bei* $p = 1$ wird $l = \frac{\lambda}{2}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$ und λ charakterisiren eine 2-punktschraube;[1]) sie besteht aus Punkten, die eine jede von 2 parallelen

1) früher als „Wechselstreifen“ bezeichnet.

Geraden äquidistant in der Weise besetzen, dass die Orthogonalprojektionen der Punkte der einen Geraden auf die andere mitten zwischen die dortigen Punkte fallen.

2) *Bei $p = 2$* wird $l = \lambda$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2}, \lambda}$ und λ charakterisiren 2 ineinandergewundene 2-punktschrauben, welche jedoch eine einfachere Auffassung zulassen. Fasst man nämlich $A_{\frac{2\pi}{2}, \lambda}$ und $-\lambda$ zu einer einzigen Deckbewegung zusammen, so erhält man die zweizählige Drehung $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Diese Bewegung und die Schiebung λ bestimmen nun zusammen lauter Punkte, die auf 2 parallelen Geraden in gleichen Abständen und paarweise in gleicher Höhe über einer und derselben Hauptebene liegen. Dieser punktbesetzte Parallelstreifen lässt sich analog den Säulen früherer Systeme als „zweizählige Säule" bezeichnen.

Die 2-punktschrauben aller Cylindermäntel sind (nach Zusatz zu 47) einander parallel; um ihre gegenseitige Stellung nun vollständig zu bestimmen, verfährt man so: Die Anwendung von Hülfssatz II nebst Zusatz auf 2 gleiche nächste Hauptaxen A lehrt, in Verbindung mit Hülfssatz IX, *dass eine zur Axe senkrechte Schiebung $4a' = 2e'$, welche in die Axentragende Linie L fällt, eine Deckbewegung ist. Ebenso erkennt man auch die Schiebung $4a'' = 2e''$ als eine Deckbewegung* (Fig. 19). *Also sind die Cylindermäntel des vierten Theils aller gleichen Axen A mit Punkten besetzt, die sich in einerlei Lage gegen eine und dieselbe Hauptebene befinden.* — Um nun die gegenseitige Stellung der 2-punktschrauben auf den Cylindermänteln dieser 4 Gruppen von gleichen Axen zu ermitteln, beachte man, dass nach Satz 42 Zusatz 1 Deckschiebungen $s'\, s''\, s'''$ existiren, deren Projektionen auf die Hauptebene mit den verdoppelten Seiten des Elementardreiecks, nämlich mit $e'\, e''\, e'''$, zusammenfallen. Ihre Projektionen auf die Axenrichtung heissen c', c'', c'''. Nun ist mit der Deckschiebung $2s'$ äquivalent die Reihenfolge der beiden Schiebungen $2e'$ und $2c'$ (Hülfssatz I); und weil, wie eben gezeigt, $2e'$ auch eine Deckbewegung ist, so ist auch $2c'$ eine solche. (Hülfssatz IX.) Andererseits kennt man λ als kleinste, der Axe parallele, Deckschiebung. Also muss:

$$2c' = q \, . \, \lambda, \text{ oder } c' = \frac{q}{2} \lambda$$

sein, wo q eine ganze Zahl oder 0 ist. Nun folgt wie in § 12 Seite 88, *dass c' entweder $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein muss.* Im ersteren Falle ist also der Abstand e' zweier nächsten gleichen Hauptaxen selbst eine Deckschiebung; im anderen Falle existirt eine Deckschiebung σ', deren Projektion auf die Hauptebene in e' fällt, während die Projektion auf die Axenrichtung $= \frac{\lambda}{2}$ ist.

In gleicher Weise ergiebt sich, *dass c'' und auch c''' nur $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein kann.* Weil indessen eine der 3 Deckschiebungen s' s'' s''' aus den beiden anderen folgt, so sind auch nur 2 von den 3 Grössen c' c'' c''' unabhängig voneinander; es seien c' und c''. — Aus der Verbindung der 3 Grössen l, c', c'', deren jede entweder $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein kann, gehn nun 8 mögliche Fälle hervor, welche sich jedoch auf nur 3 wesentlich verschiedene reduciren. Zu dieser Reduktion führt die Aufsuchung der Deckbewegungen um die 3 anderen Arten zweizähliger Axen B, C, D. Aus Hülfssatz II nebst Zusatz geht hervor, dass die beiden Deckbewegungen s' und $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$ zusammen äquivalent sind der einen Deckschraubung $B_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c'}$, sowie dass s'' und $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$ zusammen äquivalent sind der einen Deckschraubung $C_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c''}$. Ebenso sind schliesslich s' und $C_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c''}$ äquivalent mit $D_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c' \pm c''}$. Die Schraubungen um die Axen A, B, C, D besitzen also bezüglich folgende Schiebungskomponenten: l, $l \pm c'$, $l \pm c''$, $l \pm c' \pm c''$. Weil aber jede der 3 Grössen l, c', c'' nur entweder $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein kann, so entstehen für jene Schiebungskomponenten auch nur die beiden wesentlich verschiedenen Werthe 0 und $\frac{\lambda}{2}$; denn wenn eine derselben z. B. $= \lambda$ oder $= \frac{3}{2} \lambda$ wird, so bringt die Hinzufügung der Deckschiebung $- \lambda$ zu jener Schraubung wieder eine Schraubung mit der Schiebungskomponente 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ hervor. Nun sind

bezüglich der Grössen c' und c'' nur 3 verschiedene Fälle möglich:

Entweder ist $c' = c'' = 0$. Dann sind alle 4 Axenarten A, B, C, D Drehungsaxen, oder alle sind Schraubenaxen mit der Schiebungskomponente $\frac{\lambda}{2}$.

Oder es ist $c' = \pm c'' = \frac{\lambda}{2}$. Dann sind die Axen A und D Drehungsaxen, und B und C Schraubenaxen mit der Schiebungskomponente $\frac{\lambda}{2}$, oder umgekehrt A und D Schraubenaxen, und B und C Drehungsaxen, je nachdem $l = 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$.

Oder eine der beiden Grössen c', c'' *ist* $= 0$, *die andre* $= \frac{\lambda}{2}$. Für den Fall $c' = 0$, $c'' = \frac{\lambda}{2}$ sind A und B Drehungsaxen, C und D Schraubenaxen mit Schiebungskomponente $\frac{\lambda}{2}$, oder umgekehrt, je nachdem $l = 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$. Für den Fall $c' = \frac{\lambda}{2}$, $c'' = 0$ sind A und C Drehungs-, B und D Schraubenaxen, oder umgekehrt, je nachdem $l = 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$.

Die hier auftretenden verschiedenen Fälle reduciren sich auf folgende drei:

1) Alle 4 Axenarten sind Drehungsaxen.

2) Alle 4 Axenarten sind Schraubenaxen mit Schiebungskomponente $\frac{\lambda}{2}$.

3) Zwei Axenarten sind Drehungsaxen, die anderen 2 sind Schraubenaxen mit Schiebungskomponente $\frac{\lambda}{2}$. Welche der 4 Axenarten einander hier paarweise zugeordnet sind, ist im Allgemeinen gleichgültig. Nur in gewissen Specialfällen (wovon nachher Näheres) entspringen wesentlich verschiedene Systeme, je nachdem man dies oder jenes Paar von Axen einander zuordnet.

Zur Charakteristik der 3 Systeme, auf die man somit geführt wird, genügt es, neben der zur Axe parallelen Deck-

schiebung die Deckbewegungen um 3 Axenarten anzugeben, weil die Deckbewegung um die vierte, sowie die verschiedenen Deckschiebungen, daraus folgen.

1) Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},0}$, $C_{\frac{2\pi}{2},0}$, λ, (und $D_{\frac{2\pi}{2},0}$, e', e'', e''') charakterisiren das

zweizählige Säulensystem[1]) (Taf. I. Fig. 2); es besteht aus Punkten, welche die Grenzlinien von lauter parallelen, kongruenten Parallelstreifen (anders ausgedrückt: die Kanten von zweizähligen Säulen, Seite 99) in gleichen Abständen und allemal in gleicher Höhe über einer und derselben Hauptebene besetzen. Die Mittellinien dieser Streifen werden von der einen Axenart, z. B. A, gebildet. Alle Hauptebenen sind kongruent besetzt, und zwar mit Punktpaaren. Die Figur stellt unmittelbar eine solche Hauptebene vor.

2) Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, $B_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, λ, (und $D_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, e', e'', e''') charakterisiren das

2-punktschraubensystem[2]) (Taf. I. Fig. 3); es besteht aus lauter parallelen kongruenten 2-punktschrauben, die sich durch senkrecht zur Axe ausgeführte Schiebungen e' und e'' zur Deckung bringen lassen, und deren Axen in der Hauptebene ein parallelogrammatisches Netz bestimmen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten parallelogrammatischen Punktgittern besetzt.

3) Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},0}$, $C_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, λ, (und $D_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, e', σ'', σ''') charakterisiren das

System der klinorhombischen Säule (oder das zweizählige Oktaëdersystem)[3]) (Taf. I. Fig. 4); es lässt sich ansehn als aus 2 parallel ineinander gestellten kongruenten Säulensystemen bestehend, deren eines gegen das andere um die halbe Säulenhöhe $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ gehoben ist. Zwei Nachbarhauptebenen geben zusammen dieselbe Projektionsfigur wie das ganze System, in-

1) Früher: Streifensystem.
2) Früher: monoklines Wechselstreifensystem.
3) Früher: zusammengesetztes Streifensystem.

dem die abwechselnden Reihen von Punktpaaren der einen, resp. anderen Hauptebene angehören. Die Mitten sämmtlicher Punktpaare bilden ein klinorhombisches Raumgitter, und zwar verläuft die Axe der klinorhombischen Säule in der Figur von links nach rechts. — Es ist nothwendig, einige *Specialfälle* von diesem System zu schildern. Nämlich wenn das Elementarparallelogramm (vergl. Seite 75) rechteckig oder rhombisch ist, so ist ein Paar diagonal gegenüberstehender Axen durch diese seine Stellung wesentlich verschieden von einem Axenpaar, das durch 2 Nachbarecken des Elementarparalellogramms hindurchgeht. Dadurch entstehen 3 bemerkenswerthe Specialfälle.

α) Wenn bei *rechteckigem* Elementarparallelogramm beide Drehungsaxen durch 2 Nachbarecken gehn, so bilden die Mittelpunkte der Punktpaare das Raumgitter *der geraden Rhombensäule.* (Fig. 29.)

β) Wenn bei *rechteckigem* Elementarparallelogramm beide

Fig. 29.

Fig. 30.

Drehungsaxen diagonal gegenüberstehn, so bilden die Mittelpunkte der Punktpaare *ein rhombenoktaëdrisches Raumgitter* (Fig. 30), d. h. ein Gitter mit centrirten rhombischen Säulen.

γ) Wenn bei *rhombischem* Elementarparallelogramm beide Drehungsaxen diagonal gegenüberstehn, so sind die Mittelpunkte der Punktpaare nach *Oblongoktaëdern* angeordnet, d. h. 4 benachbarte bilden ein Rechteck, und senkrecht über und unter seiner Mitte liegt je 1 Nachbarmittelpunkt (Fig. 31).

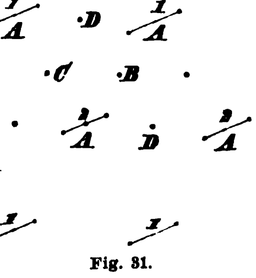


Fig. 31.

Wenn bei rhombischem Elementarparallelogramm beide Drehungsaxen durch 2 Nachbarecken gehn, zeigt das System keine bemerkenswerthen Eigenthümlichkeiten.. — Diese Specialfälle werden im folgenden Capitel von besonderer Wichtigkeit.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Zweizähliges Säulensystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', e'', \lambda$.

2) 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda$.

3) System der klinorhombischen Säule. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', \sigma'', \lambda$.

Zu letzterem 3 Specialfälle.

In den Symbolen sind e' und e'' die beiden kleinsten Deckschiebungen in 2 zur Axe senkrechten Richtungen; und σ'' ist eine Deckschiebung, deren zur Axe parallele und senkrechte Komponente resp. $= \frac{\lambda}{2}$ und $= e''$ ist.

Capitel VI.

Punktsysteme mit gleichen Hauptaxen von zwei entgegengesetzten Richtungen.

§ 15. Allgemeine Vorbetrachtungen zur Konstruktion solcher Systeme.

Die für n-zählige Hauptaxen (sei es von *einer* Richtung, sei es von 2 entgegengesetzten Richtungen) allein möglichen Anordnungen sind in § 9 abgeleitet. Also stellen die dortigen Figuren 16—19 auch für die jetzt zu ermittelnden Punktsysteme die Axenschnitte mit einer Hauptebene vor. Die einzigen Axen, welche zu den früheren neu hinzutreten, sind 2 Arten zweizähliger, welche senkrecht zu den Hauptaxenrichtungen, und zwar parallel den Radien nach den Ecken und Seitenmitten eines regulären ebenen n-ecks verlaufen (Satz 16). Sie mögen *Queraxen* heissen und mit Q und Q' bezeichnet werden. Die Deckbewegungen um die Queraxen dürfen keine neuen Lagen für die Hauptaxen hervorrufen,

(weil eben die einzig möglichen Hauptaxenlagen schon konstruirt sind), sondern sie müssen die Hauptaxen in Linien führen, welche vorher schon von Hauptaxen besetzt waren. Dabei sind aber 2 verschiedene Fälle möglich. Im vorigen Capitel, wo nur Axen von einer einzigen Richtung betrachtet wurden, hatten sich nämlich — ausser bei sechszähligen Axen — immer mehrere Arten von Hauptaxen als gleichzeitig neben einander vorhanden ergeben; jede dieser Hauptaxenarten hatte in der Hauptebene ein ebensolches Schnittpunktsnetz wie die andern, jedoch waren die verschiedenen Hauptaxenarten A, B, .. nicht deckbar, weder durch Schiebungen noch durch Drehungen um parallele Axen. Durch die jetzt hinzutretenden Deckbewegungen um die Queraxen kann es nun möglich werden, eine dieser Hauptaxenarten mit der anderen zur Deckung zu bringen, so dass beide nur scheinbar ungleich sind, nämlich nur solange, als man Deckbewegungen um Queraxen ausschliesst. — Die beiden zu unterscheidenden Hauptfälle sind nun folgende:

a) *Entweder* kommen, bei Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe, nur Hauptaxen derselben Benennung miteinander zur Deckung;

b) *Oder* es kommen auch Hauptaxen verschiedener Benennung mit einander zur Deckung.

In beiden Fällen wird *zur Konstruktion der Punktsysteme* folgendermassen verfahren. An ganz beliebiger Stelle nimmt man einen Punkt P als zum System gehörig an, und führt nun wiederholt und in allen möglichen Reihenfolgen die Deckbewegungen um die Hauptaxen, sowie die Deckschiebungen aus. Die sämmtlichen Lagen, in welche P hierbei geführt wird, bilden dann zusammen eins der Systeme des vorigen Capitels. Führt man schliesslich noch die Deckbewegung um eine der zweizähligen Queraxen aus, so werden dadurch neue Orte mit Systempunkten besetzt, indem das vorige System in eine neue Lage gerückt und somit verdoppelt wird. *Dieses verdoppelte System ist das gesuchte neue Punktsystem.* Indem man nacheinander alle Systeme des vorigen Capitels als Ausgang wählt, und sie durch die Deckbewegung um eine Queraxe verdoppelt, erhält man sämmtliche möglichen Systeme der vorliegenden Abtheilung. Zunächst soll nun eine allgemeine Vorstellung von der gegenseitigen Stellung

der beiden ineinandergesetzten kongruenten Theilsysteme gewonnen werden.

a) *Wenn bei der Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe nur Hauptaxen derselben Benennung miteinander zur Deckung kommen*, so muss es sich, in Folge der Gleichheit der Axen, stets bewirken lassen, dass eine der umgedrehten Axen sogar in dieselbe Gerade fällt, in der sie vor der Umkehrung lag, und dass doch Deckung des beweglichen und festen Systems herbeigeführt ist. Die umgekehrte Lage wird aber in diesem Fall aus der ursprünglichen herbeigeführt durch zweizählige *Drehung* um eine Queraxe Q, welche jene Hauptaxe senkrecht schneidet. Diese Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ ist also eine Deckbewegung des Systems. Durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ gehn aus dieser Queraxe andere hervor, welche parallel den Radien nach den Ecken eines regulären ebenen n-ecks verlaufen. Und ausser diesen müssen nach Satz 16 andere zweizählige Queraxen Q' nach n anderen Richtungen verlaufen, indem sie die Winkel der vorigen halbiren. Aus einer ursprünglich gegebenen Queraxe Q folgen durch die charakteristischen Deckschiebungen jedes Systems, und mit Anwendung des Hülfssatzes II mit Zusätzen, sämmtliche Queraxen von gleicher Richtung. Dasselbe gilt für eine gegebene Axe Q', deren Lage selbst aber durch die vorigen schon bedingt ist. — Weil durch die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ alle Hauptaxen in ihresgleichen fallen sollen, so sind für die Axen Q nur folgende Lagen innerhalb der Maschen, welche von der Gesammtheit aller Hauptaxen in einer Hauptebene gebildet werden, möglich.

Bei *sechszähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a) oder Höhen der dreieckigen Maschen (Fig. 16);

Bei *vierzähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a) oder Diagonalen der quadratischen Maschen (Fig. 17);

Bei *dreizähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a) der dreieckigen Maschen (Fig. 18);

Bei *zweizähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a', a'') der parallelogrammatischen Maschen (Fig. 19), welche hier rechteckig sein müssen.

Jetzt denke man das Punktsystem in der vorher beschriebenen Weise konstruirt, und man lege die zur Axenrichtung senkrechte Ebene, auf welche das System projicirt wird, durch die bei jener Konstruktion angewandte Queraxe (Konstruktionsaxe). Führt man nun die zweizählige Drehung um Q aus, so nimmt die Gesammtheit der Punkte, welche im einfachen System des vorigen Capitels sich in die Ecken eines der n-ecke projicirten, eine solche Lage an, dass sie sich in ein neues, dem vorigen kongruentes n-eck projiciren, welches aus dem vorigen durch Drehung um eine Axe Q hervorgeht (Fig. 32). Die Mittelpunkte aller dieser neuen n-ecke fallen in die Mittelpunkte von früher schon vorhandenen, weil sie ja durch die Schnittpunkte der einen Hauptaxenart mit der Hauptebene bestimmt sind. Die Ecken von je 2 mit den Mittelpunkten zusammenfallenden n-ecken bestimmen ein halbregelmässiges $2n$-eck.

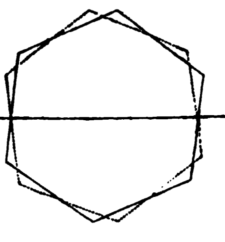


Fig. 32.

Erklärung. *Ein Vieleck soll nämlich halbregelmässig heissen, wenn es lauter gleiche Winkel, aber nur abwechselnd gleiche Seiten besitzt.* — Hiernach ergiebt sich folgender

Satz 48. *Die Projektionsfigur aller der Systeme dieses Capitels, bei denen durch Drehung um eine Queraxe Hauptaxen von einerlei Benennung miteinander zur Deckung kommen, besteht aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbregelmässigen $2n$-ecken, deren Centra in den Hauptaxen von einerlei Benennung liegen* (Textfig. 33, 34, 39, 42).

Weil die Systeme des vorigen Capitels sämmtlich aus Schaaren von 1 bis n ineinandergewundenen n-punktschrauben bestehn, so ist es zunächst nöthig, dasjenige Gebilde zu untersuchen, das durch zweizählige Drehung einer n-punktschraube um eine, ihre Axe treffende, Queraxe hervorgeht. Weil nun der Windungssinn einer Schraube durch Umkehrung der Axenrichtung ungeändert bleibt, so übersieht man ohne Weiteres, dass sich nach der Umkehrung 2 kongruente n-punktschrauben um ein und dieselbe Axe gewunden finden, deren eine gegen die andere um einen gewissen Winkel gedreht und parallel der Axenrichtung auch um eine gewisse Strecke verschoben ist. Fasst man nun 2 Punkte, deren

der beiden ineinandergese[...] [...]weiten dieser beiden
wonnen werden. [...] welche so nahe als möglich

a) *Wenn* [...] *als ein Punktpaar* zusammen,
Queraxe nur [...] *lauter* Punktpaaren, deren jedes
Deckung ko[...] *aus der Deckbewegung* $A_{2\pi}$ in das nächst-
der Axen [...]
Axen s[...] Dieses Gebilde heisse eine *zusammen-*
kehrun[...] *schraube; sie* projicirt sich in das halbregel-
fester [...] — *Alle* Systeme dieser Art unterscheiden sich
abe[...] *den entsprechenden* Systemen des vorigen Capitels nur
dr[...] *nur dass* Punktpaare an die Stelle der einfachen Punkte,
[...] *dadurch, dass zusammengesetzte* n-punktschrauben an die Stelle der
[...] einfachen, treten. *Hieraus erhellt zugleich, dass die so kon-
struirten Systeme wirklich regelmässig sind;* denn jedes Punkt-
paar lässt sich mit jedem anderen Punktpaar des Systems
durch die Deckbewegungen des entsprechenden einfachen
Systems (des vorigen Capitels) zur Deckung bringen; und
die beiden Punkte eines Paares kommen durch zweizählige
Drehung um eine Queraxe zur Deckung, während zugleich
das ganze (bewegliche und feste) System zur Deckung gelangt. Andere als die hiermit konstruirten Punkte werden
durch die vorhandenen Deckbewegungen nicht gefordert. —
Schliesslich mag noch hervorgehoben werden, dass statt der
Punktpaare auch einzelne Punkte vorhanden sein können,
wodurch das verdoppelte System den Anschein eines einfachen bekommt. Dies ist immer dann der Fall, wenn eine
Queraxe durch einen Punkt des einfachen Systems hindurchgeht.

b) *Wenn bei der Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe Hauptaxen verschiedener Benennung miteinander zur Deckung kommen,* so müssen sie doch dieselbe Schiebungskomponente der Schraubung besitzen, sonst könnten sie nicht deckbar sein. Welche Lage eine Queraxe haben muss, um eine solche Deckung herbeizuführen, wird nachher bei den einzelnen Abtheilungen untersucht. Wie im Falle a) gehn auch hier aus einer gegebenen Axe Q alle ihr parallelen hervor, wenn man die charakteristischen Deckschiebungen des Systems und den Hülfssatz II nebst Zusätzen anwendet. Dagegen folgen die gleichen, aber anders gerichteten Q durch Anwendung der Deckbewegungen um die Hauptaxen. Ent-

sprechendes gilt von den Queraxen zweiter Art (Q'); nur ist die Lage einer solchen Axe durch die vorigen schon bedingt. —

Nach Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe finden sich kongruente n-punktschrauben um Hauptaxen von zwei verschiedenen Benennungen (A und B); jedoch die Schrauben der einen Gruppe um eine gewisse Strecke gegen die der anderen Gruppe verschoben, gerechnet von einer und derselben Hauptebene aus, und über n-ecken stehend, von denen je 2 symmetrisch zu einander sind. — Bezüglich der Projektion auf eine Hauptebene gilt, wie man hiernach ohne Weiteres sieht, der

Satz 49. *Die Projektionsfigur aller der Systeme dieses Capitels, bei denen durch zweizählige Bewegung um eine Queraxe Hauptaxen verschiedener Benennung miteinander zur Deckung kommen, besteht aus 2 Schaaren kongruenter regelmässiger n-ecke, so dass die eine Schaar symmetrisch zwischen die andere hineingesetzt ist* (Textfig. 37, 47, 48).

Dass *die so konstruirten Doppelsysteme wirklich dem Begriffe regelmässiger Punktsysteme genügen*, wird durch folgende Betrachtung anschaulich. Ein einfaches System des vorigen Capitels lässt ausser der bisher immer festgehaltenen Auffassung noch folgende andere zu. Statt alle Punkte zu Schrauben auf Cylindermänteln um die nächstliegenden Axen A zusammenzufassen, ordne man die n Punkte eines Schraubenganges (oder, wenn p Schrauben ineinander gewunden sind, die $p \cdot n$ Punkte) den n anders benannten Axen B zu, welche um jene Axen A zunächst herumstehn. Dadurch erscheint das System jetzt aus anderen Schrauben aufgebaut, welche sich um die anderen Axen B winden. — In dieser Weise fasse man jetzt bei einem der vorliegenden Doppelsysteme dasjenige Theilsystem, welches aus den zunächst um die Axen A gelegenen Punkten besteht, als System von Punkten auf weiteren Cylindermänteln um die Axen B auf, während das zweite Theilsystem, wie üblich, als aus den Punkten auf den engen Cylindermänteln um dieselben Axen bestehend gedacht wird. Führt man nun die Deckbewegung um eine Axe B aus, so ist ersichtlich, dass dabei jedes der beiden Theilsysteme für sich zur Deckung kommt. Dagegen sind es zweizählige Deckbewegungen um Queraxen, wodurch ein Punkt

des einen Theilsystems mit einem des anderen zur Deckung gebracht wird. Andere als die hiermit konstruirten Punkte werden durch die vorhandenen Deckbewegungen nicht gefordert.

Satz 50. *Wenn bei zweizähliger Bewegung um eine Queraxe die beiden Fälle zugleich eintreten, dass sowohl Hauptaxen derselben Benennung, als auch Hauptaxen verschiedener Benennung miteinander zur Deckung kommen (was bei dreizähliger und bei zweizähliger Hauptaxe eintreten kann), so lässt sich die Projektion auf eine Hauptebene auffassen entweder als aus kongruenten halbregelmässigen 2n-ecken, oder als aus 2 Schaaren kongruenter, symmetrisch zwischen einander gestellter regelmässiger n-ecke gebildet* (Textfig. 41, 45).

Beweis folgt aus den Betrachtungen zur Ableitung der Sätze 48 und 49.

Hülfssatz. *Alle gleichgerichteten Schiebungen, welche zu den Deckbewegungen eines Punktsystems gehören, sind ganze Vielfache einer und derselben kleinsten Deckschiebung.*

Beweis. Gegeben seien 2 Deckschiebungen gleicher Richtung; dann ist auch ihre Differenz δ_1 eine Deckschiebung (Hülfssatz I und IX). Ebenso ist auch die Differenz δ_2 zwischen δ_1 und der kleineren von beiden gegebenen Schiebungen eine Deckschiebung; ebenso die Differenz von δ_2 und δ_1, u. s. f. So gelangt man schliesslich *entweder* zur Differenz 0; in diesem Falle sind die beiden letzten gleichen δ die fragliche kleinste Deckschiebung. *Oder* man findet unaufhörlich immer kleinere Deckschiebungen. Das ist aber unmöglich, weil dann Systempunkte unendlich nahe aneinander lägen.

Satz 51. *Andere Punkte, als die zu den 2 ineinanderstehenden Theilsystemen gehörigen, sind in Systemen mit gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen nicht möglich.*

Beweis. Angenommen zum System gehörte noch ein anderer Punkt, so müsste ein früherer Punkt mit ihm zur Deckung gebracht werden können, so dass zugleich das bewegliche und feste System sich decken. Diese Deckbewegung könnte etwa eine Schiebung sein, doch müsste ihre Projektion auf die Hauptebene entweder in den Abstand e zweier nächsten Hauptaxen von gleicher Benennung fallen oder $= 0$ sein,

damit keine neuen, unerlaubten Hauptaxenlagen entstehen. Weil nun schon Deckschiebungen existiren, die sich in c projiciren, so lassen sie sich mit den eben angenommenen zusammensetzen, woraus folgt, dass nur solche neue Deckschiebungen betrachtet zu werden brauchen, die den Hauptaxen parallel sind. — Wäre die Deckbewegung dagegen eine Schraubung, so dürfte sie doch nur zweizählig sein, und ihre Axe dürfte nur parallel einer Queraxe verlaufen und sich in dieselbe Linie mit ihr projiciren; denn andere Axen*richtungen* sind nicht möglich (Satz 16), und jede andere Annahme über ihre *absolute Lage* würde auf unerlaubte Hauptaxenlagen führen. Bewegungen um diese neue Queraxe und die ihr nächste parallele alte sind nach Hülfssatz II und IX zusammen äquivalent einer Deckschiebung, die sich in die Queraxe projicirt, und deren zur Hauptaxe parallele Komponente ebenfalls eine Deckschiebung sein muss (wie vorher); so dass nur diese betrachtet zu werden braucht. — Eine solche Schiebung wäre also die einzig mögliche Deckbewegung für einen der neuen Punkte. Nun giebt es in derselben Richtung schon die Deckschiebung λ, welche aus den alten Queraxen folgt und daher verschieden von der neuen sein muss; und nach dem Hülfssatz müssen sich beide als Vielfache einer und derselben kleinsten Deckschiebung ε ergeben. Wenn aber ε die kleinste Deckschiebung längs der Hauptaxe ist, so ist die zur Hauptaxe gehörige Deckbewegung nach Satz 47 $= A_{\frac{2\pi}{n}, \frac{p.\varepsilon}{n}}$ und nicht mehr: $A_{\frac{2\pi}{n}, \frac{p.\lambda}{n}}$. Dann gelangt man also zu irgend einem einfachen System des vorigen Capitels, welches durch die Deckbewegung um die Queraxe verdoppelt wird. Dadurch zeigt sich also, dass ein solches verdoppeltes System das einzig mögliche mit gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen ist. —

Es ist für die Anschauung erleichternd, bei manchem der folgenden Systeme mehrere Punkte zu engeren Gruppen zusammenzufassen, die dann mit eigenen Namen versehen werden. So heisse *gewundene Säule* die Gesammtheit der Eckpunkte zweier kongruenter regelmässiger Vielecke, die in parallelen Ebenen mit den Mittelpunkten gerade übereinander liegen, deren Seiten aber nicht parallel laufen; dabei denke man sich die Verbindungslinien von den Ecken des einen

Vielecks nach den 2 nächsten Ecken des anderen gezogen. Die Projektion einer gewundenen Säule auf die Ebene einer ihrer Endflächen bildet ein halbregelmässiges $2n$-eck.

Gleichflächiges Tetraëder, *Rhombentetraëder* oder *rhombisches Sphenoid* ist der Halbflächner des Rhombenoktaëders; es entspricht der gewundenen Säule, wenn das Vieleck ein Zweieck (ein Punktpaar) ist. Es ist von 4 kongruenten spitzwinkligen Dreiecken begrenzt, und wird folglich einfach dadurch konstruirt, dass man in einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck die Seitenmitten verbindet und die 4 so gebildeten Dreiecke zusammenfaltet. Je nachdem man nach der einen oder der anderen Seite zusammenfaltet, entstehn 2 symmetrische (oder nach Naumann enantiomorphe) Körper, die sich wie Objekt und Spiegelbild gleichen und auf keine Art miteinander zur Deckung zu bringen sind. Jedes hat die Eigenschaft, durch zweizählige Drehungen um 3 durch sein Centrum gelegte, aufeinander senkrechte Axen, die in den Mitten zweier Gegenkanten auf letzteren senkrecht stehn, mit sich selbst zur Deckung zu gelangen.

Schon bei den Systemen des vorigen Capitels ist darauf aufmerksam gemacht, dass die kongruenten n-ecke der Projektionsfigur beliebig um ihre Mittelpunkte gedreht werden dürfen, sofern sie nur sämmtlich untereinander parallel bleiben. Jede neue Lage, die man ihnen so geben mag, liefert also ein System von einem gewissen individuellen Charakter. Ganz entsprechende und nur noch auffallendere Specialarten von Punktsystemen finden sich in diesem Capitel. Es ist nun nicht unwahrscheinlich, dass gewisse, besonders einfache Specialfälle als stabile Gleichgewichtslagen der Krystallelemente gerade besonders häufig in der Natur realisirt sind. Aus diesem Grunde sind zum Schluss jeder Abtheilung dieses Capitels einige der bemerkenswerthesten Specialfälle zusammengestellt.

§ 16. Konstruktion der Systeme mit 6-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 6-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 26—28) nur eine Hauptaxenart. Daher müssen die entgegengesetzt gerichteten Axen

der beiden ineinander stehenden Theilsysteme in dieselben Linien fallen; *und folglich ist (nach Satz 48) die Projektionsfigur aller Systeme dieser Abtheilung auf eine Hauptebene aus den Ecken kongruenter paralleler halbregelmässiger Zwölfecke gebildet, die sich gleiche Seiten gerade zuwenden, und deren Centra in den Hauptaxen liegen* (Fig. 33).

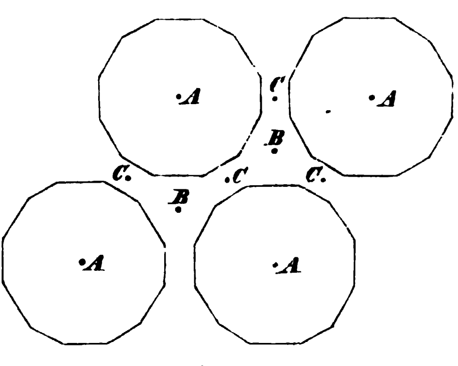


Fig. 33.

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung werden aus den 6-zähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung abgeleitet durch 2-zählige Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine Queraxe, deren Projektion auf eine Hauptebene in eine Seite oder Höhe einer der dreieckigen Maschen fällt, die durch die Gesammtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Im Uebrigen ist die Lage der Konstruktionsaxe willkürlich. Die eine Art von Queraxen Q verläuft parallel den Seiten, die andere Art Q' parallel den Höhen der erwähnten dreieckigen Maschen; und zwar projiciren sich Drehaxen in die Seiten und Höhen dieser Maschen selbst, dagegen Schraubenaxen, deren Schiebungskomponente bezüglich gleich der halben Maschenseite oder halben Maschenhöhe $\left(h = \frac{e}{2}\sqrt{3}\right)$ ist, mitten zwischen 2 nächste paralle Seiten oder Höhen. Die Schnittpunkte aller gleichgerichteten Queraxen Q bilden mit einer auf ihnen senkrechten Ebene ein gewisses *Schnittpunktsnetz*; ebenso alle gleichgerichteten Q' mit einer auf ihnen senkrechten Ebene.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, zusammengesetzte 6-punktschraubensystem*[1]) (Taf. IV. Fig. 48, 49), $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm\frac{\lambda}{6}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, unterscheidet sich vom einfachen 6-punktschraubensystem nur

1) früher: sechszähliges Doppelschraubensystem.

Vielecks nach den 2 nächsten F…
Die Projektion einer gewun… …der dortigen einfachen
ihrer Endflächen bildet

Gleichflächiges … …rehung $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ um eine in e fallende
sches Sphenoid is… …das Vorhandensein einer parallelen
es entspricht d… …sich, von der vorigen um $\frac{\lambda}{2}$ entfernt. Ebenso
Zweieck (ein … …Axenrichtung unter 60° geneigten Deckschie-
winkligen … …mit der Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ nach Hülfssatz II Zusatz 2
dadurch k…
ligen D… …parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{e}{2}}$, von der vorigen um
bildete…
der …
2 … …Maschenhöhe, d. h. um $\frac{h}{2}=\frac{e}{4}\sqrt{3}$, entfernt. Also hat das
… Schnittpunktsnetz aller Axen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{h}{2}$. — Eine in h fallende, also mit den vorigen Axen 30° einschliessende, Queraxe Q' trifft eine Hauptaxe nicht in demselben Punkte, wo letztere von einer der vorigen Axen Q getroffen wird, sondern um $\frac{\lambda}{12}$ davon entfernt; denn nur so geht durch Q' aus Q jene Axe hervor, welche aus ihr auch durch die Bewegung $A_{\frac{2\pi}{6},\frac{\lambda}{6}}$ hervorgeht. — Nun folgt nach Hülfssatz II aus $Q'_{\frac{2\pi}{2},0}$ und λ die Existenz einer parallelen zweizähligen Drehaxe im Abstande $\frac{\lambda}{2}$, und aus $Q'_{\frac{2\pi}{2},0}$ und der zu ihr unter 30° geneigten Deckschiebung e die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q'_{\frac{2\pi}{2},h}$ im Abstande $\frac{e}{4}$. Also hat dieses Schnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e}{4}$. In beiden Netzen sind die Maschenseiten parallel und senkrecht zur Hauptaxe. — Durch die Bewegung $A_{\frac{2\pi}{6},\frac{\lambda}{6}}$ werden beide Queraxenschaaren in neue Lagen geführt.

3) und 4) *Das rechte, resp. linke, zweigängige zusammengesetzte 6-punktschraubensystem*[1]) (Taf. IV. Fig. 50, 51) $A_{\frac{2\pi}{6},\pm\frac{\lambda}{3}}$. $\lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$. Statt das System als zweigängiges 6-punktschraubensystem, jedoch mit Punktpaaren an Stelle einfacher Punkte,

1) früher: Treppensystem des Rhombenoktaëders.

zusehn, kann man sich von ihm folgende anschauliche stellung bilden. Im entsprechenden System des vorigen ls liegen immer 2 Punkte in den Enden eines Durch- des Schraubencylinders; fasst man nun im vorliegenden m 2 nächstbenachbarte solche Durchmesser, die dem einen nd anderen der 2 ineinander stehenden Theilsysteme angehören, in Gedanken zusammen, so bestimmen ihre Endpunkte ein *gleichflächiges Tetraëder.* Das ganze System besteht aus Schichten von solchen kongruenten parallelen Tetraëdern, deren Centra ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bilden, und deren 3 Drehungsaxen parallel sind zur Hauptaxe, zu einer Seite und der zugehörigen Höhe der dreieckigen Masche. Die Nachbarschicht entsteht aus der vorigen durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{3}}$. Drei aufeinander folgende Schichten geben dieselbe Projektion wie das ganze System; jedes der Zwölfecke in der Fig. ist die Projektion dreier, und zugleich unendlich vieler, solcher Tetraëder.

Die beiden Schnittpunktsnetze der Queraxen Q und Q' stimmen mit denen des vorigen Systems überein, denn die Deckschiebungen λ und e sind dieselben wie dort; aber die gegenseitige Lage beider Axenschaaren ist eine andere; denn die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' geschnitten wird, haben hier den Abstand $\frac{\lambda}{6}$, während er dort $\frac{\lambda}{12}$ betrug. Der Beweis dafür ist derselbe wie dort.

5) *Das dreigängige zusammengesetzte 6-punktschraubensystem*[1]) (Taf. IV. Fig. 52) $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Hier stehn immer 2 Dreiecke, dem einen und anderen der beiden Theilsysteme angehörend, benachbart übereinander; ihre Ecken bestimmen eine gewundene dreiseitige Säule. Jede Hauptaxe ist mit solchen kongruenten gewundenen Säulen besetzt, die abwechselnd um 60^0 um ihre Axe gegeneinander gedreht sind. Jedes Zwölfeck der Fig. ist die Projektion von 2, und zugleich von unendlich vielen, gewundenen Säulen, die auf dieselbe Hauptaxe aufgereiht sind.

Die Schnittpunktsnetze der Q und Q' sind dieselben wie vorher,

1) früher: Doppelsystem der Sternsäule.

denn die Deckschiebungen λ und e sind dieselben; jedoch haben beide Axenschaaren eine andere gegenseitige Lage; denn die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' geschnitten wird, haben jetzt den Abstand $\frac{\lambda}{4}$.

6) *Das zusammengesetzte Hexagonalsäulensystem*[1]) (Taf. IV. Fig. 53) $A_{\frac{2\pi}{6}, 0}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Es stehn immer 2 Sechsecke, angehörend dem einen und anderen Theilsystem, benachbart übereinander; ihre Ecken bestimmen eine gewundene sechsseitige Säule; jedes Zwölfeck der Fig. ist die Projektion einer solchen. Die Figur ist die Projektion von 2 benachbarten Hauptebenen; das ganze System ist aus solchen Hauptebenenpaaren, deren Mittelebenen äquidistant übereinander liegen, zusammengesetzt.

Die Schnittpunktsnetze der Q und der Q' sind wieder dieselben wie vorher, weil die Deckschiebungen λ und e dieselben sind. Jetzt aber treffen Queraxen Q und Q' eine Hauptaxe in demselben Punkte. Daher verlaufen in jeder Ebene mitten zwischen 2 nächsten Hauptebenen die Queraxen aller vorkommenden Richtungen zugleich.

Einige Specialfälle: Die Zwölfecke der Projektionsfigur können sich auf Sechsecke reduciren; letztere kehren einander dann die Ecken oder die Seiten gerade zu; dabei kann jedes Sechseck von Quadraten und gleichseitigen Dreiecken umgeben sein, oder nur von gleichseitigen Dreiecken; oder alle Sechsecke liegen mit den Seiten aneinander, wie Bienenzellen. Ferner kann sich jedes Zwölfeck auf seinen Mittelpunkt zusammenziehn; diese Figur entsteht, wenn die gewundene sechsseitige Säule auf ein Punktpaar (in der Säulenaxe) oder sogar nur auf ihren Mittelpunkt reducirt ist; im letzteren Falle ist das System in das Raumgitter der regelmässig dreiseitigen Säule übergegangen. Sodann kann das Zwölfeck ein ganz regelmässiges sein; die in ein solches sich projicirende gewundene sechsseitige Säule ist durch ihre grosse Symmetrie ausgezeichnet. Die einzelnen Punktpaare können den Hauptebenen parallel sein; so kann auch die gewundene Säule in das Zwölfeck der Projektionsfigur selbst übergehn; u. s. f.

---

1) früher: System der gewundenen Säule.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) und 2) Rechtes, linkes, zusammengesetztes 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm\frac{\lambda}{6}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) und 4) Rechtes, linkes, zweigängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

5) Dreigängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

6) Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{6}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 17. Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 4-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 29—33) zwei verschiedene Hauptaxenarten. Daher giebt es 2 Möglichkeiten, ein solches System durch Umwenden zu verdoppeln, indem jede der beiden Axenarten A, B beim Umwenden entweder mit sich selbst, oder mit der anderen zur Deckung kommt.

α) *Jede Axenart kommt mit sich selbst zur Deckung. Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 48 aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbregelmässigen Achtecken, die sich gleiche Seiten gerade zuwenden, und deren Centra in den Hauptaxen von einerlei Benennung (A) liegen* (Fig. 34).

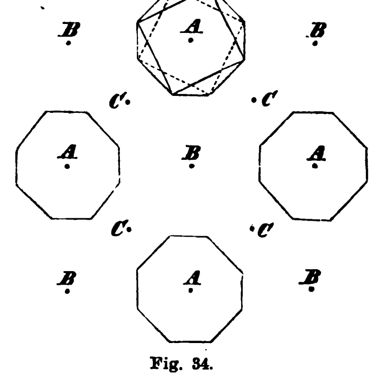


Fig. 34.

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehn aus den 4-zähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch zweizählige Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine Queraxe, deren Projektion auf eine Hauptebene in eine Seite a oder Diagonale e einer

der quadratischen Maschen fällt, die durch die Gesammtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Im Uebrigen ist die Lage dieser Konstruktionsaxe willkürlich. Die eine Art von Queraxen Q verläuft parallel den Seiten, die andere Q' parallel den Diagonalen jener Maschen. (Und zwar projiciren sich Drehaxen in die Seiten und Diagonalen der Maschen, Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ mitten zwischen 2 nächste parallele Seiten. Einige Systeme haben auch noch Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$, deren Projektionen in die Maschendiagonalen fallen.) Wegen späterer Anwendung im folgenden Capitel wird bei den Systemen dieses und des folgenden § die Anordnung der Queraxen noch besonders durch Figuren veranschaulicht. Um beide Schnittpunktsnetze und zugleich das Axenschnittpunktsnetz der Hauptebene zu übersehen, werden die beiden ersteren in die Hauptebene umgeklappt. In den hergehörigen Figuren sind dann LL' und $L'L''$ die Linien, in welchen die Hauptebene von der einen und der anderen derjenigen 2 Ebenen geschnitten wird, welche die fraglichen Schnittpunktsnetze tragen; um diese Linien ist also das Umklappen ausgeführt. In den umgeklappten Netzen sind die Schnittpunkte der Schraubenaxen durch Kreuze bezeichnet, die der Drehaxen durch Punkte.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, zusammengesetzte 4-punktschraubensystem* [1]) (Taf. III. Fig. 32, 33) $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ besteht aus parallelen kongruenten zusammengesetzten 4-punktschrauben, die durch Schiebungen e, senkrecht zur Hauptaxe, zur Deckung gelangen, und deren jede sich in ein Achteck der Hauptebene projicirt.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in a fallende Queraxe ziehen nach Hülfssatz II das Vorhandensein einer parallelen zweizähligen Drehaxe nach sich, von der vorigen um $\frac{\lambda}{2}$ entfernt. Ebenso folgt aus der Deckschiebung e und der Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ nach Hülfsatz II Zus. 2 die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$,

1) früher: vierzähliges Doppelschraubensystem.

von der vorigen um $\frac{a}{2}$ entfernt. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Axen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{a}{2}$ (Fig. 35). — Eine in e fallende, also mit den vorigen Axen 45° einschliessende, Queraxe Q' trifft eine Hauptaxe nicht in demselben Punkte, wo letztere von einer der vorigen Queraxen Q getroffen wird, sondern um $\frac{\lambda}{8}$ davon entfernt; denn nur so geht durch Q' aus Q jene Axe hervor, welche aus ihr auch durch die Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ hervorgeht.—Nun folgt nach Hülfsatz II aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und λ die Existenz einer parallelen zweizähligen Drehaxe im Abstande $\frac{\lambda}{2}$, und aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und e die Existenz noch einer parallelen Drehaxe im Abstande $\frac{e}{2}$. Also hat dieses Schnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e}{2}$. In beiden Schnittpunktsnetzen sind die Maschenseiten parallel und senkrecht zur Hauptaxe.

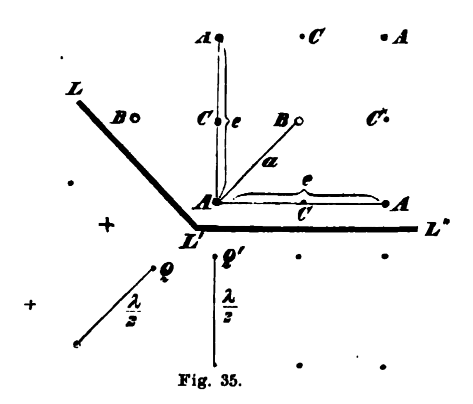


Fig. 35.

3) *Das vierzählige zusammengesetzte Gegenschraubensystem*[1]) (Taf. III. Fig. 34) $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ lässt sich ansehn als bestehend aus 2 kongruenten zusammengesetzten Schraubensystemen, die parallelaxig so ineinanderstehn, dass die Schraubenaxen des einen mitten zwischen je 4 solchen des anderen verlaufen, und dass das eine gegen das andere um die halbe Schraubenhöhe gehoben ist. Die einander zugewandten Punktpaare von 4 zunächst um eine Axe B herumstehenden Schrauben A bilden eine zusammengesetzte Vierpunktschraube von entgegengesetztem Windungssinn als die Schrauben um A, aber von gleicher Schraubenhöhe.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in a

1) früher: Doppelsystem der Gegenschrauben.

fallende Queraxe sind äquivalent der zweizähligen Drehung um eine parallele Axe, die von der ersteren um $\frac{\lambda}{2}$ absteht. Ebenso folgt aus der Deckschiebung σ, deren Projektionen auf die Hauptebene und auf die Hauptaxe resp. e und $\frac{\lambda}{2}$ sind, und aus $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ die Existenz einer parallelen zweizähligen Schraubenaxe q, die um $\frac{\lambda}{4}$ höher als die vorige liegt (gerechnet von einer Hauptebene aus), und um $\frac{a}{2}$ zur Seite gerückt. Diese 3 parallelen Queraxen bestimmen ein Schnittpunktsnetz, gebildet aus rhombischen Maschen, deren Diagonalen der Hauptaxe und Hauptebene parallel sind und die Grösse $\frac{\lambda}{2}$ und a haben (Fig. 36). — Eine in e fallende Queraxe Q' trifft eine Hauptaxe um $\frac{\lambda}{8}$ entfernt vom Schnitt derselben mit einer der vorigen Q (was wie beim vorigen System erhellt). Aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und λ folgt die Existenz einer parallelen, um $\frac{\lambda}{2}$ entfernten Drehaxe. Aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und der auf ihr senkrechten Deckschiebung σ folgt eine parallele Drehaxe, die um $\frac{\lambda}{4}$ höher und um $\frac{e}{2}$ zur Seite gerückt ist. Endlich aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und derjenigen Deckschiebung σ, die mit Q' und einer Hauptaxe in derselben Ebene liegt, folgt die Existenz einer zweizähligen parallelen Schraubenaxe $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$, die um $\frac{\lambda}{4}$ höher als $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ liegt. Diese Queraxen bestimmen ein Schnittpunktsnetz mit rechteckigen Maschen, deren zur Hauptaxe und Hauptebene parallele Seiten resp. $= \frac{\lambda}{4}$ und $= \frac{e}{2}$ sind.

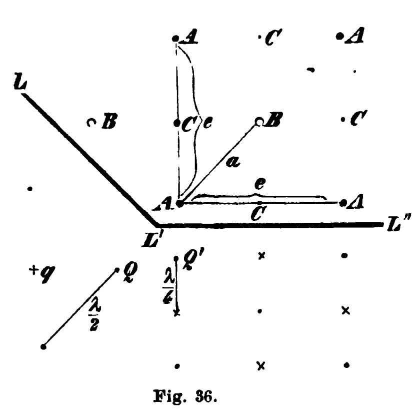


Fig. 36.

4) *Das zweigängige zusammengesetzte 4-punktschraubensystem* [1])

1) früher: System der gekreuzten Rhombentetraëder.

(Taf. III. Fig. 35) $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ unterscheidet sich von dem entsprechenden einfachen System nur durch das Auftreten von Punktpaaren statt der einfachen Punkte. Anschaulicher ist aber folgende Auffassung. Zwei nächstbenachbarte Hauptebenen bilden eine Schicht kongruenter paralleler gleichflächiger Tetraëder, deren Centra als quadratisches Maschennetz angeordnet sind, und deren Drehaxen der Hauptaxe und den Maschenseiten (oder statt der letzteren auch den Maschendiagonalen) parallel laufen. Die nächstfolgende Schicht ist der vorhergehenden kongruent, jedoch um 90° um eine Hauptaxe gedreht. Somit trägt jede Hauptaxe in gleichen Abständen die Centra von kongruenten gleichflächigen Tetraëdern; doch sind letztere nur abwechselnd parallel, während die benachbarten gekreuzt stehn. — Man kann auch 2 einander zugewandte Grenzebenen zweier Nachbarschichten in Gedanken zusammenfassen; dann bilden sie ebenfalls eine Schicht von Tetraëdern; jedoch verlaufen die zur Hauptebene parallelen Drehaxen derselben unter 45° geneigt gegen diejenigen der vorigen Schichten.

Die Schnittpunktnetze der Queraxen stimmen mit denen des zusammengesetzten Schraubensystems 1) überein (Fig. 35), denn die Deckschiebungen λ und e sind dieselben wie dort; aber die gegenseitige Lage beider Netze ist eine andere; denn die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' geschnitten wird, haben hier den Abstand $\frac{\lambda}{4}$, während er dort $\frac{\lambda}{8}$ betrug. Der Beweis dafür ist derselbe wie dort.

5) *Das zusammengesetzte Quadratsäulensystem*[1]) (Taf. III. Fig. 36) $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Je 2 Quadrate, angehörend dem einen und dem anderen Theilsystem, stehn benachbart übereinander und bilden eine gewundene vierseitige Säule, deren Projektion auf die Hauptebene ein Achteck ist. Das ganze System besteht aus kongruenten parallelen gewundenen Säulen, deren Centra das Raumgitter der quadratischen Säule bilden. Die Projektion der Besetzung von 2 Nachbarhauptebenen auf eine von ihnen ist gleich der Projektion des ganzen Systems, das aus solchen Hauptebenenpaaren, deren Mittelebenen äquidistant aufeinanderfolgen, besteht.

---

1) früher: System der gewundenen Säule.

Weil die Deckschiebungen λ und ε mit denen beim zusammengesetzten Schraubensystem 1) übereinstimmen, so sind beide Schnittpunktsnetze der Queraxen wieder dieselben wie dort (Fig. 35), jedoch wieder in anderer gegenseitiger Lage. Weil nämlich Queraxen Q und Q' eine Hauptaxe in demselben Punkte treffen, so verlaufen in einer Ebene mitten zwischen 2 Nachbarhauptebenen Queraxen von allen erlaubten Richtungen zugleich.

6) *Das zusammengesetzte Quadratoktaëdersystem*[1]) (Taf. III. Fig. 37) $A_{\frac{2\pi}{4},0}$, λ, σ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, lässt sich ansehn als aus 2 parallel mitten ineinander stehenden kongruenten Systemen der vorigen Art bestehend, deren eins gegen das andere um die halbe Säulenhöhe $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ gehoben ist. Lauter parallele kongruente gewundene Säulen stehn so beisammen, dass ihre Centra ein quadratoktaëdrisches Raumgitter bilden.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen des zusammengesetzten Gegenschraubensystems 3) überein (Fig. 36), denn die Deckschiebungen λ und σ sind dieselben wie dort. Aber beide Netze haben hier eine andere gegenseitige Lage; während dort die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' getroffen wird, um $\frac{\lambda}{8}$ von einander abstanden, ist dieser Abstand hier 0.

Einige Specialfälle. Die Achtecke der Projektionsfigur können sich auf Quadrate reduciren; letztere kehren einander dann die Ecken oder die Seiten gerade zu. Ferner kann sich jedes Achteck auf seinen Mittelpunkt zusammenziehn; diese Figur entsteht, wenn die gewundene vierseitige Säule auf ein Punktpaar (in der Säulenaxe) oder sogar nur auf ihren Mittelpunkt reducirt ist; im letzteren Falle ist das System in das Raumgitter der quadratischen Säule oder in das des Quadratoktaëders übergegangen. Die Achtecke können auch ganz aneinanderliegen, nur quadratische Lücken zwischen sich lassend. Sodann kann das Achteck ein *ganz* regelmässiges sein; die in ein solches sich projicirende gewundene vierseitige Säule ist besonders regelmässig. Die einzelnen Punktpaare können den Hauptebenen parallel sein; auch kann die gewundene Säule in das Achteck der Projektionsfigur selbst übergehn; u. s. f.

---

1) früher: Doppelsystem des Quadratoktaëders.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projicirt sich in a.)

1) und 2) Rechtes, linkes, zusammengesetztes 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{4}, 0}$.

3) Vierzähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

4) Zweigängiges zusammengesetztes 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

5) Zusammengesetztes Quadratsäulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

6) Zusammengesetztes Quadratoktaëdersystem.

$$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 18. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

β) Jede Axenart kommt beim Umwenden mit der anders benannten zur Deckung.

Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 49 aus 2 Schaaren kongruenter Quadrate, so dass die eine Schaar symmetrisch zwischen die andere hineingesetzt ist. (Textfig. 37.) Durch die Centra der Quadrate der einen Schaar gehn die Axen A, durch diejenigen der anderen Schaar die Axen B. Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehn aus den 4-zähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch zweizählige Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine Queraxe, deren Projektion auf eine Hauptebene mitten zwischen 2 nächsten parallelen Seiten a der quadratischen Maschen verläuft, die durch die Gesammtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Die Lage dieser Konstruktionsaxe ist im Uebrigen willkürlich. Die eine Art von Queraxen Q verläuft parallel den

Seiten a, die andere Q' parallel den Diagonalen e jener Maschen. (Und zwar projiciren sich Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ in die Seiten a, Drehaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ mitten zwischen sie; ferner Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$ mitten zwischen 2 nächste parallele Diagonalen). Weil die ungleich benannten Hauptaxen nur dann zur Deckung bringbar sind, wenn sie dieselbe Schiebungskomponente der Schraubung besitzen [anderenfalls wären sie nicht gleich, also nicht deckbar], so ist es unmöglich das Gegenschraubensystem und das Quadratoktaëdersystem zur Ableitung neuer Systeme der vorliegenden Abtheilung zu benutzen; denn bei ersterem sind beide Hauptaxenarten von entgegengesetztem Windungssinn $\left(A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}\right.$ und $\left.B_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}\right)$, bei letzterem besteht die eine Art aus Drehungsaxen $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, die andere aus Schraubenaxen $B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$. Also entspringen nur aus den 4 übrigen 4-zähligen Systemen von *einer* Axenrichtung neue Systeme.

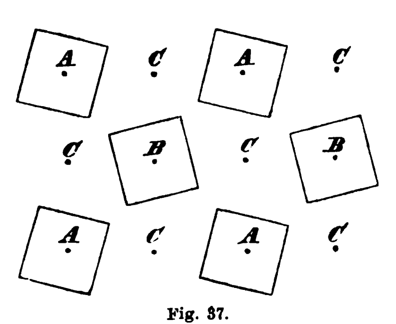


Fig. 37.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, abwechselnde 4-punktschraubensystem*[1] (Taf. III. Fig. 38, 39) $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ besteht aus 2 ineinanderstehenden einfachen Schraubensystemen, so dass die Axen A des einen Systems in den Axen B des anderen liegen und dort nach entgegengesetzter Richtung verlaufen. Schreitet man von einer Schraube zur nächsten Schraube fort, so gehören die aufeinander folgenden abwechselnd dem einen und dem anderen Theilsystem an. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit einem quadratischen Punktgitter besetzt; die Figur ist die Projektion 8 solcher aufeinander folgender Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

---

1) früher: Zusammengesetztes vierzähliges Schraubensystem.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ um eine zwischen zwei a verlaufende Queraxe ziehn nach Hülfssatz II das Vorhandensein einer parallelen Drehaxe nach sich, von der vorigen um $\frac{\lambda}{2}$ entfernt. Ebenso folgt aus der Deckschiebung e und der Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ nach Hülfssatz II, Zusatz 2 die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},a}$, um $\frac{a}{2}$ von der vorigen entfernt. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Axen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{a}{2}$. (Fig. 38.) Eine mitten zwischen 2 nächsten parallelen Diagonalen e verlaufende Queraxe Q' muss eine Schraubenaxe sein; sie muss um $\frac{\lambda}{8}$ tiefer liegen (gerechnet von einer Hauptebene aus), als die vorige Queraxe Q; denn nur so geht durch Q' aus Q jene Axe hervor, welche aus ihr auch durch die Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{4}}$ hervorgeht. — Nun folgt aus dieser Q' und der Deckschiebung λ wieder die Existenz einer parallelen zweizähligen Schraubenaxe im Abstande $\frac{\lambda}{2}$; und aus Q' und e folgt nach Zus. 1 zu Hülfssatz II die Existenz einer parallelen Schraubenaxe im Abstand $\frac{e}{2}$. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Axen dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e}{2}$. In beiden Schnittpunktsnetzen sind die Maschenseiten parallel und senkrecht zur Hauptaxe.

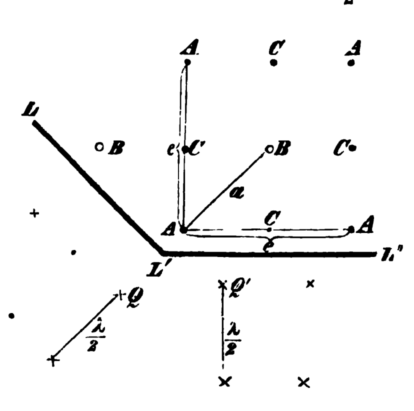


Fig. 38.

3) *Das abwechselnde zweigängige 4-punktschraubensystem*[1]) (Taf. III. Fig. 40), $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ besteht aus 2 ineinander stehenden zweigängigen 4-punktschraubensystemen, so dass die Axen A des einen Theilsystems in den Axen B des

1) früher: Zusammengesetztes Kreuzsprossensystem.

anderen liegen und dort nach entgegengesetzter Richtung verlaufen. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit Punktpaaren besetzt, die zusammen 2 beliebig ineinandergestellte kongruente quadratische Punktgitter bilden. Die Figur ist die Projektion 4 aufeinander folgender Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen des vorigen Systems überein, weil die Deckschiebungen λ und e dieselben sind wie dort (Fig. 38); aber die gegenseitige Lage beider Netze ist insofern eine andere, als die Queraxe Q' jetzt um $\frac{\lambda}{4}$ tiefer liegt als Q, gerechnet von einer Hauptebene aus, während dieser Abstand beim vorigen Systeme $\frac{\lambda}{8}$ betrug. Der Beweis ist wie dort.

4) *Das abwechselnde Quadratsäulensystem*[1]) (Taf. III. Fig. 41), $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, besteht aus 2 ineinander gestellten Quadratsäulensystemen. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit den Eckpunkten kongruenter paralleler Quadrate besetzt. Die Figur ist die Projektion zweier benachbarter Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen der beiden vorigen Systeme überein, weil die Deckschiebungen λ und e dieselben sind (Fig. 38); jedoch ist die gegenseitige Lage der beiden Netze hier wieder eine andere, da Q' jetzt in derselben Hauptebene mit Q liegt.

Einige Specialfälle. Die Quadrate der Projektionsfigur können einander die Seiten oder die Ecken gerade zukehren; auch können sie sich zu Punkten reduciren, dies entspricht zwei ineinandergestellten kongruenten Raumgittern der quadratischen Säule. Ferner können jene Quadrate mit den Ecken zusammenstossen, rhombische Zwischenräume zwischen sich lassend. Ferner können 2 nächstbenachbarte besetzte Hauptebenen in eine Ebene zusammenfallen; u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projicirt sich mitten zwischen 2 benachbarte a.)

1) und 2) *Rechtes, resp. linkes, abwechselndes 4-punktschraubensystem.* $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

1) früher: Zusammengesetztes System der Quadratsäule.

3) *Abwechselndes zweigängiges 4-punktschraubensystem.* $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

4) *Abwechselndes Quadratsäulensystem.* $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2}}$,

§ 19. Konstruktion der Systeme mit 3-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 3-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 34—37) drei verschiedene Hauptaxenarten. Daher scheinen zunächst 3 Weisen denkbar, wie ein hergehöriges System durch Umwenden verdoppelt werden kann. *Entweder* kommt beim Umwenden jede der 3 Axenarten A, B, C mit sich selbst zur Deckung, — dies wird herbeigeführt durch zweizählige Drehung um eine Queraxe, die in die Verbindungslinie a zweier nächsten Hauptaxen fällt; — *oder* nur eine Art kommt mit sich selbst zur Deckung, während die beiden anderen Arten sich austauschen; — dies geschieht durch zweizählige Drehung um eine Queraxe, die in die Verbindungslinie e zweier nächsten *gleichen* Hauptaxen fällt; — *oder* alle 3 Axenarten tauschen sich aus; — dies geschieht durch Schraubung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{a}{2}}$ um eine Queraxe, welche mitten zwischen 2 nächsten parallelen a verläuft. Aber bei Ausführung der letzteren Bewegung fällt eine umgewendete Axe B in A, und die umgewendete A in C; folglich wäre eine umgewendete A deckbar sowohl mit der nicht gewendeten B, als mit der nicht gewendeten C; also wären B und C untereinander deckbar, ohne umgewandt zu werden. Das ist aber nach Satz 37 unmöglich. Also fällt die dritte Art der Verdoppelung eines dreizähligen Systems durch Umwenden als unausführbar fort.

α) *Jede Axenart kommt mit sich selbst zur Deckung. Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 48 aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbregelmässigen Sechsecken, deren Centra in den Hauptaxen von einerlei Benennung (z. B. A) liegen, und deren Seiten parallel sind den Maschenseiten des durch diese Hauptaxenart gebildeten Netzes, also auch parallel den Höhen der durch alle Hauptaxen zusammen bestimmten dreieckigen Maschen* (Fig. 39).

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehn aus den dreizähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch zweizählige Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ um eine Queraxe, deren Projektion auf eine Hauptebene in eine Seite a einer der dreieckigen Maschen fällt, die durch die Gesammtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Im Uebrigen ist die Lage dieser Konstruktionsaxe willkürlich. Die eine Art von Queraxen, Q, verläuft in entgegengesetzten Richtungen als die andere Q'. (Und zwar projiciren sich Drehaxen in die a, Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{3a}{2}}$, parallel zu den a, mitten zwischen sie.)

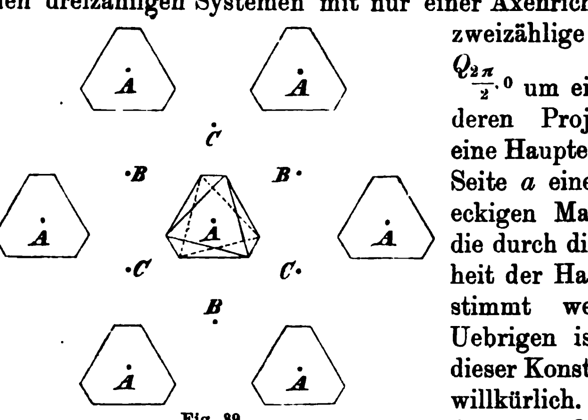


Fig. 39.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, zusammengesetzte 3-punktschraubensystem* [1]) (Taf. II. Fig. 19, 20) $A_{\frac{2\pi}{3},\pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ besteht aus parallelen zusammengesetzten 3-punktschrauben, deren jede sich in ein halbregelmässiges Sechseck projicirt.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ um eine in a fallende Queraxe ziehn nach Hülfssatz II das Vorhandensein einer parallelen zweizähligen Drehaxe, im Abstande $\frac{\lambda}{2}$, nach sich. Ebenso folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und der dazu senkrechten Deckschiebung e die Existenz einer parallelen zweizähligen Drehaxe, im Abstande $\frac{e}{2}$. Dagegen folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und einer zu ihr unter 30° geneigten Deckschiebung e (nach Zus. 2 zu Hülfssatz II) die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{3a}{2}}$ im Abstande $\frac{e}{4}$. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Queraxen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und

1) früher: Dreizähliges Doppelschraubensystem.

$\frac{e}{4}$, welche resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. — Ganz ebenso beschaffen ist das Schnittpunktsnetz von untereinander gleichgerichteten Queraxen der anderen Gattung Q'. Eine Drehaxe Q und eine Q', die nach einer um 60° abweichenden Richtung verläuft, treffen eine und dieselbe Hauptaxe in zwei um $\frac{\lambda}{6}$ entfernten Punkten.

3) *Das zusammengesetzte dreiseitige Säulensystem*[1]) (Taf. II. Fig. 21) $A_{\frac{2\pi}{3},0}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$. Je 2 gleichseitige Dreiecke, angehörend dem einen und dem anderen Theilsystem, stehn benachbart über einander und bilden eine gewundene dreiseitige Säule, deren Projektion auf die Hauptebene ein Sechseck ist. Das ganze System besteht aus kongruenten parallelen gewundenen Säulen, deren Centra das Raumgitter der regelmässig dreiseitigen Säule bilden. Die Projektion der Besetzung von 2 Nachbarhauptebenen auf eine von ihnen ist gleich der Projektion des ganzen Systems, das aus solchen Hauptebenenpaaren, deren Mittelebenen äquidistant aufeinander folgen, besteht.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen sind gleich denen beim vorigen System, weil die Deckbewegungen λ, e und $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ beiden Systemen gemeinsam sind. Jetzt aber treffen 2 Queraxen von beiden Arten Q und Q' eine Hauptaxe in demselben Punkt, so dass die gegenseitige Lage der beiden Schnittpunktsnetze hier eine andre ist wie vorher.

4) *Das zusammengesetzte Rhomboëdersystem*[2]) (Taf. II. Fig. 22), $A_{\frac{2\pi}{3},0}$, λ, σ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ unterscheidet sich vom einfachen Rhomboëdersystem nur dadurch, dass gewundene Säulen statt der gleichseitigen Dreiecke eintreten. Also besteht das ganze System aus kongruenten parallelen gewundenen dreiseitigen Säulen, deren Centra ein rhomboëdrisches Raumgitter bilden. Die Projektion der Besetzung von 3 Paaren je benachbarter Hauptebenen auf eine von ihnen ist gleich der Projektion des ganzen Systems, das aus lauter solchen Ebenenpaaren besteht.

Das Schnittpunktsnetz der Queraxen Q ergiebt sich so: (Fig. 40) Aus der durch a gelegten Querdrehaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und der Schiebung λ

1) früher: System der gewundenen dreiseitigen Säule.

2) früher: Doppel-Rhomboëdersystem.

folgt die Existenz einer ebensolchen Drehaxe Q, im Abstand $\frac{\lambda}{2}$, gerechnet parallel der Hauptaxe. Aus $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und der zu ihr und zur Hauptaxe senkrechten Schiebung $3e$ folgt die Existenz einer gleichen Axe Q_2 im Abstand $\frac{3e}{2}$. Mitten zwischen dieser und der Ausgangsaxe muss eine Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{3a}{2}}$ verlaufen, gefordert durch die Ausgangsaxe und durch die Deckschiebung $3a$. Somit folgen in dem Schnittpunktsnetz längs einer zur Hauptaxe senkrechten Linie abwechselnd Schnittpunkte von Drehaxen und von Schraubenaxen im Abstande $\frac{3e}{4}$ aufeinander; ebenso längs einer parallelen Linie, die um $\frac{\lambda}{2}$ höher liegt, u. s. f. Zwei zu diesen Linien parallele, in den Abständen $\frac{\lambda}{6}$ und $\frac{2\lambda}{6}$ von der ersteren, tragen ebensolche abwechselnde Dreh- und Schraubenaxen, jedoch sind letztere sämmtlich um $\frac{2e}{4}$, resp. $\frac{3e}{4}$ seitlich verschoben. Die Existenz dieser Axen folgt aus der anfänglichen Querdrehaxe, verbunden mit den Deckschiebungen σ, deren zur Hauptaxe parallele Komponente theils $\frac{\lambda}{3}$, theils $\frac{2\lambda}{3}$ ist. Das Schnittpunktsnetz hat also parallelogrammatische Maschen, deren zur Hauptaxe senkrechte Seiten die Länge $\frac{3e}{4}$ haben, von einander um $\frac{\lambda}{6}$ abstehn, und um $\frac{e}{4}$ seitlich gegeneinander verschoben sind. — Das Schnittpunktsnetz der Queraxen Q' stimmt mit dem eben geschilderten überein, nur dass die parallelogrammatischen Maschen nach der anderen Seite schief sind als vorher; so als würde das vorige Schnittpunktsnetz von der Hinterseite der Zeichnungsfläche aus besehen. Dies rührt daher, dass die Gesammtheit dieser Queraxen Q' mit der Gesammtheit einer Queraxenschaar Q, wenn man sie als entgegengesetzt gerichtet auffasst, zusammenfällt. (Vergl. dazu Satz 16.)

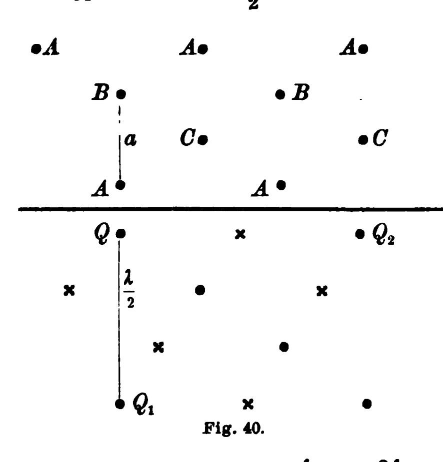


Fig. 40.

Einige Specialfälle. Die Sechsecke der Projektionsfigur

können sich auf gleichseitige Dreiecke reduciren, so gelegen, dass ihre Seiten parallel sind den Seiten derjenigen Dreiecksmaschen, die durch die Centra bestimmt werden. Hierbei ist die weitere Specialisirung möglich, dass die Zwischenräume zwischen den Dreiecken regelmässige Sechsecke sind, wobei dann die ganze Ebene völlig erfüllt ist von solchen Sechsecken und den sie umkränzenden gleichseitigen Dreiecken. Ferner kann sich jedes Sechseck auf seinen Mittelpunkt zusammenziehn; diese Figur, ein Netz mit gleichseitig dreieckigen Maschen, entsteht, wenn die gewundene dreiseitige Säule auf ein Punktpaar (in der Säulenaxe) oder sogar nur auf ihren Mittelpunkt reducirt ist; im letzteren Falle ist das System in das Raumgitter der regelmässig dreiseitigen Säule oder in das rhomboëdrische Raumgitter übergegangen. Sodann kann das Sechseck ein regelmässiges sein; die in ein solches sich projicirende gewundene Säule ist besonders regelmässig; hierbei kann die weitere Specialisirung eintreten, dass die ganze Ebene mit unmittelbar aneinander liegenden kongruenten regelmässigen Sechsecken erfüllt ist (Bienenzellen). — Die einzelnen Punktpaare können den Hauptebenen parallel sein; auch kann die gewundene Säule in das Sechseck der Projektionsfigur selbst übergehn, u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projicirt sich in a.)

1) und 2) Rechtes, resp. linkes, zusammengesetztes 3-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\lambda}{3}}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \ \lambda, \ e, \ Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

4) Zusammengesetztes Rhomboëdersystem.

$$A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \ \lambda, \ \sigma, \ Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 20. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit dreizähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

β) Eine Axenart kommt beim Umwenden mit sich selbst zur Deckung, die beiden anderen tauschen sich aus.

Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 50 aus kongruenten parallelen halbregelmässigen Sechsecken, sie ist aber auch ansehbar als gebildet aus 2 symmetrisch ineinander stehenden Gruppen kongruenter gleichseitiger Dreiecke. (Fig. 41.) Indem zur Ableitung dieser Systeme aus denjenigen mit 3-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung die Drehung um eine Queraxe dient, welche in den Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen (z. B. A) fällt, so liegen die Centra aller halbregelmässigen Sechsecke in diesen Hauptaxen A, und ihre Seiten sind parallel den Höhen der durch diese Hauptaxen A bestimmten gleichseitigen Dreiecke, also auch parallel den Seiten der durch die Gesammtheit aller Hauptaxen bestimmten gleichseitig dreieckigen Maschen. Fasst man dagegen alle Punkte der Projektionsfigur zu Dreiecken zusammen, so liegen die Centra der Dreiecke

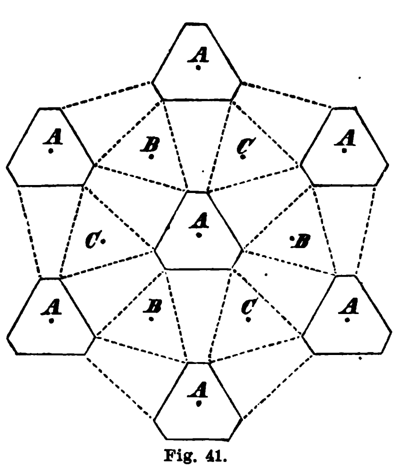


Fig. 41.

erster Stellung in der einen Hauptaxenart (z. B. B), die der Dreiecke zweiter Stellung in der anderen Hauptaxenart (z. B. C), so dass die Gesammtheit aller Dreieckscentra ein Netz von regelmässig sechseckigen Maschen (Bienenzellen) bestimmt. Da die beiden Dreiecksgruppen den beiden ineinander stehenden einfachen Theilsystemen entsprechen, so lässt diese Auffassung der Projektionsfigur die Analogie mit den 4-zähligen Systemen des § 18 deutlich erkennen. Die Konstruktionsaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ liegt im Abstande e zweier nächsten gleichen Hauptaxen, sonst aber beliebig. Die eine Art von Queraxen Q verläuft in entgegengesetzten Richtungen als die andere Q'. (Drehaxen projiciren sich in die Seiten der durch die eine Axenart (A) bestimmten gleichseitigen Dreiecke; Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{e}{2}}$, parallel zu ihnen, mitten zwischen

sie.) Weil die ungleich benannten Hauptaxen nur dann zur Deckung bringbar sind, wenn sie dieselbe Schiebungskomponente der Schraubung besitzen [anderenfalls wären sie nicht gleich, also nicht deckbar], so ist es unmöglich, das Rhomboëdersystem zur Ableitung eines Systems dieser Abtheilung zu benutzen, denn bei ihm besteht die eine Axenart aus Drehungsaxen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, und beide andere aus Schraubenaxen entgegengesetzten Windungssinnes $\left(B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}\right)$. Also entspringen nur aus den 3 übrigen 3-zähligen Systemen von einer Axenrichtung neue Systeme.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, abwechselnde Dreipunktschraubensystem*[1]) (Taf. II. Fig. 23, 24), $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ besteht aus 2 ineinanderstehenden einfachen Schraubensystemen, so dass z. B. die Schraubenaxen B des einen Systems in den Axen C des anderen liegen und dort nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Fasst man also die Punkte des einen Theilsystems zu Dreipunktschrauben um die Axen B zusammen, die des anderen Theilsystems zu Schrauben um die Axen C, und schreitet man jetzt von Schraube zu Schraube fort, so gehören die aufeinander folgenden abwechselnd dem einen und dem anderen Theilsystem an. Andere Auffassung desselben Systems: Man fasse die Punkte des einen Theilsystems zu Dreipunktschrauben um die Axen A zusammen. Weil diese Axenart beim Umwenden mit sich selbst zur Deckung kommt, so entspringt aus jeder einfachen Schraube um A eine zusammengesetzte 3-punktschraube um A, so dass das System auch als ein zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem auffassbar ist. Es unterscheidet sich von dem früheren System dieses Namens dadurch, dass die gegenseitige Stellung der verschiedenen zusammengesetzten Schrauben hier eine andere ist. Dreht man nämlich, bei unveränderter Stellung der Axen, alle Schrauben um 30° um ihre Axen, so geht das vorliegende System in jenes frühere über. — Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit einem Punktgitter gleichseitig dreieckiger Maschen besetzt; die Figur ist die

---

1) früher: Zusammengesetztes dreizähliges Schraubensystem.

Projektion 6 solcher aufeinander folgender Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in e fallende Queraxe ziehn das Vorhandensein einer zweizähligen parallelen Drehaxe im Abstand $\frac{\lambda}{2}$ nach sich. Ferner folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und einer zu ihr unter 60° geneigten Deckschiebung e die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$ im Abstande $\frac{1}{4}a$. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Queraxen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{1}{4}a$, welche bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. — Ebenso beschaffen ist das Schnittpunktsnetz von untereinander parallelen Queraxen der anderen Gattung Q'. Eine Drehaxe Q und eine Q', die nach einer um 60° abweichenden Richtung geht, treffen eine und dieselbe Hauptaxe in zwei um $\frac{\lambda}{6}$ entfernten Punkten.

3) *Das abwechselnde dreiseitige Säulensystem*[1]) (Taf. II. Fig. 25), $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, λ, e, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ besteht aus zwei ineinander gestellten dreiseitigen Säulensystemen, so dass die Säulenmittellinien z. B. in den Axen B und C liegen. In anderer Auffassung besteht das System aus gewundenen dreiseitigen Säulen um die A als Mittellinien, und sein Unterschied vom zusammengesetzten dreiseitigen Säulensystem besteht nur darin, dass sämmtliche Säulen hier um 30° um ihre Axen gedreht sind, verglichen mit ihrer dortigen Stellung. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit den Eckpunkten paralleler kongruenter gleichseitiger Dreiecke besetzt. Die Figur ist die Projektion zweier benachbarter Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen des vorigen Systems überein; sie liegen aber anders gegeneinander, indem 2 Queraxen Q und Q' jetzt eine Hauptaxe in ein und demselben Punkt treffen.

Einige Specialfälle. Die Sechsecke der Projektionsfigur können sich auf gleichseitige Dreiecke reduciren, so gelegen, dass ihre Seiten parallel sind den Höhen derjenigen Dreiecksmaschen, die durch die Centra bestimmt werden. Wenn sich jedes Sechseck auf seinen Mittelpunkt zusammenzieht,

1) früher: Zusammengesetztes System der dreiseitigen Säule.

entstehen dieselben Systeme wie unter derselben Voraussetzung bei der vorigen Abtheilung (pag. 131). Wenn die Sechsecke regelmässige sind, so wenden die umgebenden Dreiecke einander die Seiten gerade zu; zwischen letzteren können dabei quadratische Zwischenräume bleiben; oder die Dreiecke können sich dabei auf Punkte reduciren, so dass die ganze Figur aus unmittelbar aneinander liegenden regelmässigen Sechsecken (Bienenzellen) besteht. Die einzelnen Punktpaare der Sechsecke können der Hauptebene parallel sein; auch kann die gewundene Säule in das Projektionssechseck selbst übergehn, u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projicirt sich in e)

1) und 2) Rechtes, resp. linkes, abwechselndes 3-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 21. Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 2-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 38 — 41) 4 verschiedene Hauptaxenarten, welche auf einer senkrechten Ebene ein parallelogrammatisches Schnittpunktsnetz bestimmen. Daher giebt es mehrere Möglichkeiten ein hergehöriges System durch Umwenden zu verdoppeln, je nachdem nämlich jede der 4 Axenarten, oder nur einige von ihnen, oder keine, mit sich selbst zur Deckung kommt. Indessen ist nicht bei jeder beliebigen Beschaffenheit des parallelogrammatischen Schnittpunktsnetzes eine derartige Umwendung ausführbar, dass die Axen in Linien fallen, die schon vorher von Axen besetzt waren, d. h. dass bei der Umwendung das Axenschnittpunktsnetz der Hauptebene mit sich zur Deckung gelange; *sondern dies ist nur dann möglich, wenn das Elementarparallelogramm ein Rechteck oder ein Rhombus ist.* Nun sind nur folgende 5 Fälle denkbar:

a) *Jede der 4 Axenarten kommt beim Umwenden mit sich selbst zur Deckung.* In diesem Falle muss es immer möglich sein, eine und dieselbe Axe umgewendet in sich selbst fallen zu lassen; das wird herbeigeführt durch zweizählige Drehung um eine, jene Axe senkrecht schneidende Queraxe. Damit hierbei zugleich jede der 3 anderen Axenarten mit sich zur Deckung komme, muss das Elementarparallelogramm ein *Rechteck* sein, und jene Queraxe muss in eine seiner Seiten fallen.

b) *Jede der 3 Axenarten kommt mit sich selbst zur Deckung, die vierte nicht.* Jetzt müsste also die vierte Axenart in Linien fallen, die bisher nicht mit Axen besetzt waren, und das ist unmöglich (Satz 38, Zusatz).

c) *Jede von 2 Axenarten kommt mit sich selbst zur Deckung, die beiden anderen tauschen sich aus.* Hier muss es immer möglich sein, eine Axe umgewendet in sich selbst fallen zu lassen; dies wird erreicht durch zweizählige Drehung um eine, jene Axe senkrecht schneidende Queraxe. Damit hierbei zugleich noch eine der anderen Axenarten mit sich selbst zur Deckung komme, und die übrigen beiden Axenarten sich austauschen, muss das Elementarparallelogramm ein *Rhombus* sein, und jene Queraxe muss in eine Diagonale desselben fallen.

d) *Nur eine Axenart kommt mit sich zur Deckung.* Dass hierbei von den 3 anderen zwei sich austauschen, während die vierte in bisher unbesetzte Gerade fällt, ist unmöglich. Ebenso unmöglich ist es, dass die 3 anderen Axenarten sich cyklisch austauschen, weil sonst wie in § 19 (Seite 127) folgen würde, dass alle 3 untereinander gleich sind, was nach Satz 41 unmöglich. Also ist dieser Fall überhaupt ausgeschlossen.

e) *Keine Axenart kommt mit sich zur Deckung.* Die Axen können weder in bisher unbesetzte grade Linien einrücken (Satz 38, Zusatz), noch können sie sich cyklisch vertauschen, sonst müssten sie untereinander gleich sein, was nach Satz 41 unmöglich ist. *Also dürfen sich die 4 Axenarten nur paarweise austauschen.* Nun sei das erste Paar von sich austauschenden Axen z. B. A, C, das andere Paar B, D. Dann müssen sich in der Projektionsfigur 19 (Seite 73) die Linien L und M austauschen; dies geschieht durch zwei-

zählige *Drehung* oder *Schraubung* um eine zu beiden parallele, mitten zwischen ihnen verlaufende Queraxe. Soll 1) *durch Drehung* die Austauschung beider Paare bewirkt werden, so kann das Elementarparallelogramm nur ein *Rechteck* sein, dessen *ein* paralleles Seitenpaar in L und M liegt. Jetzt gehn die sich austauschenden Axenarten durch 2 Nachbarecken des Elementarparallelogramms; die Queraxe steht in der Mitte dieser Rechtecksseite auf ihr senkrecht. — Soll 2) *durch Schraubung* die Austauschung beider Paare erfolgen, so kann das Elementarparallelogramm kein Rhombus sein, weil hierbei statt paarweiser Austauschung cyklische Vertauschung eintreten würde; es muss vielmehr ein *Rechteck* sein, um dessen eine Mittellinie (z. B. $\parallel e'$) die Schraubung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$ auszuführen ist, damit die Austauschung eintrete. Hierbei stehn die sich austauschenden Axenarten diagonal gegenüber.

Es giebt nach Obigem 4 Abtheilungen hergehöriger Punktsysteme, entsprechend den Fällen a), c), e1) und e2), welche als α), β), γ), δ) unterschieden werden sollen. *In jedem dieser Fälle existiren nach Satz 24 zweizählige Axen nach 3 Paaren von entgegengesetzten Richtungen, deren jedes auf den beiden anderen senkrecht steht;* und jede Schaar von Axen, die in parallelen Linien verlaufen, muss nach Satz 38 und 41 aus 4 Axenarten bestehn (sowie die erste aus A, B, C, D), die jedesmal auf einer senkrecht schneidenden Ebene ein parallelogrammatisches Schnittpunktsnetz bestimmen. Die Bezeichnung „Hauptaxe“ hat hier, wo nur gleichvielzählige Axen vorkommen, ihre eigentliche Bedeutung verloren; sie wird aber, mit Rücksicht auf die Ableitung der Systeme aus solchen mit 2-zähligen Axen von nur einer Richtung, und der kurzen Ausdrucksweise halber, beibehalten.

α) *Jede Axenart kommt mit sich selbst zur Deckung.* Das Elementarparallelogramm ist rechteckig. *Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 48 aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbregelmässigen Vierecken (d. h. Rechtecken), deren Centra in der einen Axenart (z. B. A) liegen, also selbst ein rechteckiges Netz bilden, und deren Seiten parallel laufen den Seiten der durch die 4 Axenarten bestimmten Maschen* (Fig. 42).

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehn aus zweizähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch zweizählige Drehung um eine Queraxe Q, die in eine Seite (z. B. a') des Elementarrechtecks fällt, sonst aber beliebig liegt. Die Queraxen zweiter Art, Q', projiciren sich in die anderen Seiten (a'') der Elementarrechtecke.

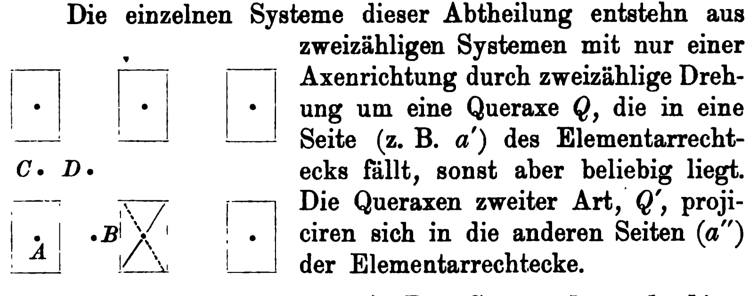


Fig. 42.

1) *Das System der rechteckigen Säule*[1] $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},0}$, $C_{\frac{2\pi}{2},0}$, λ, $\left(D_{\frac{2\pi}{2},0}, e', e''\right)$, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ (Taf. I. Fig. 5) entspringt aus dem zweizähligen Säulensystem. Je 2 Punktpaare, angehörend dem einen und dem anderen Theilsystem, stehn zunächst übereinander und bestimmen ein *gleichflächiges Tetraëder*, das sich in ein Rechteck der Figur projicirt. Das ganze System besteht aus solchen kongruenten parallelen Tetraëdern, deren Centra ein rechtwinklig parallelepipedisches Raumgitter bilden. Die Projektion zweier Nachbarhauptebenen ist gleich der Projektion des ganzen Systems.

Die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, verknüpft mit der Deckschiebung λ, fordert die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstand $\frac{\lambda}{2}$; aber verknüpft mit der Deckschiebung e'', fordert sie die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstande $\frac{e''}{2} = a''$. Also besitzt das Schnittpunktsnetz der Queraxen Q rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e''}{2}$, bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Die zu den vorigen senkrecht verlaufenden Queraxen Q' sind Drehaxen und haben ebenfalls ein rechteckiges Schnittpunktsnetz mit den Maschenseiten $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e'}{2}$. Zwei Axen Q und Q' treffen eine Hauptaxe in demselben Punkt (nämlich im Mittelpunkt eines gleichflächigen Tetraëders, oder mitten zwischen 2 solchen). Die Gesammtheit aller Axen des Systems bildet also ein recht-

1) früher: Tetraëderschichtensystem mit rechtwinklig parallelepipedischer Masche.

winklig parallelepipedisches Axennetz mit den Parallelepipedkanten $\frac{\lambda}{2}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$.

2) *Das zusammengesetzte rechteckige 2-punktschraubensystem*[1]) (Taf. I. Fig. 6) $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, \left(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e''\right),$ $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entspringt aus dem 2-punktschraubensystem; es besteht aus zusammengesetzten 2-punktschrauben, deren Axen mit der einen Art zweizähliger Axen (z. B. den A) zusammenfallen, also ein rechteckiges Netz bestimmen. Die Konstruktionsaxe Q halbirt den Abstand eines Punktpaars, wie dergleichen statt der einzelnen Punkte des einfachen Schraubensystems eintreten.

Die Queraxen Q und Q' sind sämmtlich Drehaxen; die von ihnen gebildeten Schnittpunktsnetze sind gleich denen des vorigen Systems, weil die Deckschiebungen e', e'', λ und die Lage der Querdrehaxe Q mit den dortigen übereinstimmen; aber beide Netze liegen hier anders gegeneinander wie dort, indem eine Hauptaxe in zwei um $\frac{\lambda}{4}$ auseinander liegenden Punkten von einer Q und einer Q' getroffen wird.

3) *Das System der Rhombensäule erster Art*[2]) (Taf. I. Fig. 7) $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, B_{\frac{2\pi}{2}, 0}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, \left(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', \sigma''\right), Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, entspringt aus dem Specialfall α) des Systems der klinorhombischen Säule (pag. 103), bei welchem die Mittelpunkte der Punktpaare das Raumgitter der geraden Rhombensäule bilden. Durch die Verdoppelung des Systems treten statt jedes Punktpaars 2 solche auf, die zusammen ein gleichflächiges Tetraëder bestimmen. Das System besteht also aus lauter parallelen kongruenten gleichflächigen Tetraëdern, deren Centra das Raumgitter der geraden Rhombensäule bilden. (Die Axe dieser geraden Säule verläuft in der Figur horizontal von links nach rechts.)

Die Queraxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, welche mit e' und folglich mit dieser Säulenaxe parallel läuft, und die Deckschiebung λ, fordern zusammen die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstande $\frac{\lambda}{2}$. Die erstere Queraxe und die auf ihr senkrechte Deckschiebung $2e''$ fordern zusammen

1) früher: Stufenschichtensystem.

2) früher: Tetraëderschichtensystem mit rhombischer Säulenmasche.

die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstand e''; so dass lauter solche Axen für sich ein rechteckiges Schnittpunktsnetz bilden. Es giebt aber noch mehr gleichgerichtete Axen. Nämlich aus der anfänglichen Queraxe Q und der zu ihr senkrechten Deckschiebung σ'' folgt die Existenz einer parallelen Drehaxe, gerichtet durch den Mittelpunkt einer rechteckigen Masche jenes Schnittpunktsnetzes. Das gesammte Schnittpunktsnetz der $\parallel e'$ verlaufenden Queraxen Q hat also rhombische Maschen mit den Diagonalen $\frac{\lambda}{2}$ und e'', bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. — Senkrecht zu diesen Queraxen verlaufen andere, Q'. Eine solche, verbunden mit den Deckschiebungen λ und e' führt auf parallele Drehaxen in den Abständen $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e'}{2}$. Ferner fordert $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, verbunden mit σ'', die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e''}$, um $\frac{\lambda}{4}$ von der Anfangsaxe Q' entfernt. Hier hat also das Schnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{4}$ und $\frac{e'}{2}$, bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Eine Hauptaxe wird von 2 aufeinander senkrechten Querdrehaxen Q und Q' in ein und demselben Punkt geschnitten.

4) *Das Rhombenoktaëdersystem*[1]) (Taf. I. Fig. 8) $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, $\left(D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'', e'''\right)$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entspringt aus dem Specialfall β) des Systems der klinorhombischen Säule (pag. 103). Auch hier treten statt jedes Punktpaars 2 solche ein, die zusammen ein gleichflächiges Tetraëder bilden. Daher besteht das System aus lauter kongruenten, parallelen gleichflächigen Tetraëdern, deren Centra ein Raumgitter mit centrirten rhombischen Säulen bilden; d. h. das System ist ansehbar als gebildet aus 2 kongruenten Systemen der vorigen Art, die parallel mitten ineinander gestellt sind, so dass die Tetraëdercentra des einen Theilsystems in die Mitten der rhombischen Säulenmaschen, die durch die Centra des anderen Theilsystems gebildet sind, hineinfallen. Die Centra von 6 benachbarten Tetraëdern bilden die Ecken eines *Rhombenoktaëders*.

Die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in e' fallende Axe, verbunden

1) früher: Zusammengesetztes Tetraëderschichtensystem mit rhombischer Säulenmasche.

mit der Deckschiebung σ', fordert eine parallele Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, e'}$ im Abstande $\frac{\lambda}{4}$. $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und e''' fordern zusammen eine parallele Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, e'}$, von der Anfangsaxe um $\frac{e''}{2}$ entfernt (in der Richtung von e''). $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und σ'' fordern zusammen eine parallele Drehaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, so gelegen, dass sie im Schnittpunktsnetz die vierte Ecke einer rechteckigen Masche bestimmt, deren 3 andere Ecken durch die vorigen 3 Queraxen bestimmt werden. Die rechteckigen Maschen dieses Schnittpunktsnetzes haben also die Seiten $\frac{\lambda}{4}$ und $\frac{e''}{2}$ $(= a'')$, resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Die Hälfte aller Axen dieser Richtung besteht aus Drehaxen, die andere Hälfte aus Schraubenaxen. Ebenso findet man als Schnittpunktsnetz der auf diesen Queraxen senkrechten Queraxen Q' ein Netz rechteckiger Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e'}{2}$ $(= a')$, resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Auch hier ist die Hälfte aller Axen Drehaxen, die andere Hälfte Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e''}$. Bedenkt man nun, dass eine Hauptdrehaxe von 2 aufeinander senkrechten Querdrehaxen Q und Q' in ein und demselben Punkte geschnitten wird (welcher entweder das Centrum eines gleichflächigen Tetraëders ist, oder mitten zwischen 2 solchen Nachbarcentren liegt), und dass auch die Hauptaxen zu gleichen Theilen Dreh- und Schraubenaxen sind, so folgt: Die Gesammtheit aller Axen des Systems bildet ein rechtwinklig parallelepipedisches Axennetz mit den Parallelepipedkanten $\frac{\lambda}{4}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$; in 2 diametral gegenüberliegenden Parallelepipedecken stossen je 3 Drehaxen (d) zusammen; die anderen 6 Parallelepipedkanten sind Schraubenaxen (s) (Fig. 43 und 44).

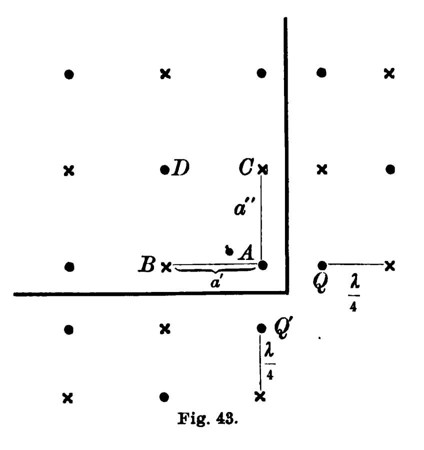


Fig. 43.

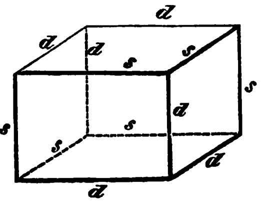


Fig. 44.

die Existenz [illegible] ... der Projektionsfigur
solche Axen [illegible] ... Rechtecke, d. h. grade Linien) reduciren,
giebt aber [illegible] ... der Elementarparallelogramme.
fänglichen [illegible] ... Rechteck auf seinen Mittelpunkt re-
folgt die E[illegible] ... entsteht z. B., wenn das gleichflächige
punkt ein[illegible] ... Punktpaar oder nur auf den Mittelpunkt
sammte [illegible] ... jetzt ist das System in ein rechtwinklig

rhombis[illegible] ... rhombisch-säulenförmiges oder

und sei[illegible] ... Raumgitter übergegangen. Sodann
laufen [illegible] ... die Rechtecke in Quadrate übergehn. Auch können

λ und [illegible] ... die einzelnen Punktpaare den Hauptebenen parallel sein; und

Fer[illegible] ... die gleichflächigen Tetraëder können in die Rechtecke der Projektionsfigur selbst übergehn.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) System der rechteckigen Säule. $A_{\frac{2\pi}{2},0}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.

2) Zusammengesetztes rechteckiges 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.

3) System der Rhombensäule erster Art. $A_{\frac{2\pi}{2},0}, e', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.

4) Rhombenoktaëdersystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.

In den Symbolen sind e' und e'' aufeinander und auf λ senkrecht; σ ist eine Deckschiebung, deren zur Axe A parallele und senkrechte Komponente resp. $= \frac{\lambda}{2}$ und $= e$ ist. Die Queraxe Q fällt in e'.

§ 22. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

β) *Jede von 2 Axenarten kommt mit sich selbst zur Deckung, die beiden anderen tauschen sich aus.*

Das Elementarparallelogramm ist ein Rhombus mit den Diagonalen δ', δ''. *Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme lässt sich nach Satz 50 entweder als aus kongruenten parallelen Rechtecken bestehend ansehn, deren Centra ein rhom-*

bisches Netz bilden, oder sie ist ansehbar als gebildet aus 2 symmetrisch ineinander stehenden Gruppen kongruenter grader Linien (Zweiecke) (Fig. 45). Indem zur Ableitung dieser Systeme aus denjenigen mit 2-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung die Drehung um eine Queraxe dient, welche in eine Diagonale des rhombischen Elementarparallelogramms fällt (im Uebrigen aber beliebig liegt), so liegen die Centra aller Rechtecke in der einen Hauptaxenart (z. B. A), und ihre Seiten sind parallel den Rhombendiagonalen. Fasst man aber alle Punkte zu Paaren zusammen, so liegen die

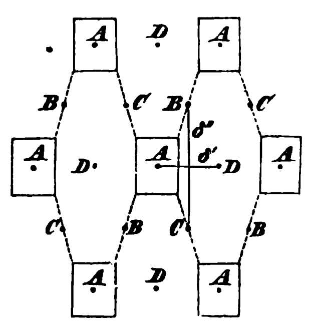


Fig. 45.

Mittelpunkte der Paare erster Stellung in der einen Hauptaxenart (z. B. B), die der Paare zweiter Stellung in der anderen (C), so dass alle Mittelpunkte zusammen ein rechteckiges Netz bestimmen.

Aus dem *zweizähligen Säulensystem* entspringt das schon vorher unter α, 3 abgeleitete System der *Rhombensäule erster Art.* Nämlich durch Drehung um die Queraxe geht aus einer mit parallelen Punktpaaren besetzten Hauptebene ein Hauptebenenpaar hervor, gleichflächige Tetraëder zwischen sich fassend, deren Centra ein rhombisches Gitter bilden. Die Fig. 45 ist also die Projektion dieses Systems auf eine Ebene senkrecht zur Axe der Rhombensäule.

1) *Das zusammengesetzte rhombische 2-punktschraubensystem* [1]) (Taf. I. Fig. 9) $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, B_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, \lambda, \left(D_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, e', e'' = e'\right),$ $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ entspringt aus dem 2-punktschraubensystem; es besteht aus zusammengesetzten 2-punktschrauben, deren Axen mit der einen Art zweizähliger Axen (z. B. A) zusammenfallen, also ein rhombisches Netz bestimmen. Die Konstruktionsaxe Q halbirt den Abstand eines Punktpaares, wie dergleichen statt der einzelnen Punkte des einfachen Systems eintreten.

Die in die Rhombendiagonale δ' ($= AD$) fallende Drehaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$

1) früher: Zusammengesetztes Wechselschichtensystem.

und die Deckschiebung λ fordern die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstande $\frac{\lambda}{2}$. Und $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ nebst der Deckschiebung e' fordern eine parallele Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \delta'}$ im Abstande $\frac{\delta''}{2}$, gemessen senkrecht zur Hauptaxe. Also hat das Schnittpunktsnetz dieser Queraxen Q rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{\delta''}{2}$, bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe; die Hälfte der Queraxen, nämlich alle diejenigen, welche die Hauptaxen A und D schneiden, sind Drehaxen, die andere Hälfte, nämlich die, welche die Axen B und C schneiden, sind Schraubenaxen. — Die auf diesen Queraxen senkrechte Schaar von Queraxen Q' ist von der eben geschilderten nicht wesentlich verschieden; nur haben die rechteckigen Maschen des Schnittpunktsnetzes bezüglich die Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{\delta'}{2}$, und die Schraubenaxen sind $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \delta''}$. Zwei nächste Queraxen der einen und anderen Schaar, Q und Q', treffen eine Hauptaxe in Punkten, die um $\frac{\lambda}{4}$ voneinander abstehn.

Damit aus dem System der klinorhombischen Säule ein System der vorliegenden Abtheilung entspringe, muss sein Elementarparallelogramm ein Rhombus sein, und es müssen die 4 Axenarten so angeordnet sein, dass je 2 Drehaxen sich diagonal gegenüberliegen, und ebenso je 2 Schraubenaxen; denn sonst würden sich bei der Umdrehung um eine Queraxe eine Dreh- und eine Schraubenaxe austauschen sollen, was ihrer Ungleichheit wegen unmöglich ist. Das System der klinorhombischen Säule muss also in der Specialisirung γ) zu Grunde gelegt werden, wo die Mittelpunkte der zur Hauptebene parallelen Punktpaare nach *Oblongoktaëdern* angeordnet sind (pag. 103). Hier sind aber noch 2 Fälle zu unterscheiden: nämlich entweder fallen die beiden Drehaxenarten je in sich selbst, während die beiden Schraubenaxenarten sich austauschen; oder umgekehrt. So entstehn also die folgenden beiden neuen Systeme.

2) *Das System des Oblongoktaëders*[1]) (Taf. I. Fig. 10) $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, $\left(D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'' = \sigma', e''' = 2\delta'\right)$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entsteht aus dem System der klinorhombischen Säule (Spe-

1) früher: Zusammengesetztes Tetraëderschichtensystem mit rechtwinklig parallelepipedischer Masche.

cialisirung γ) durch Umdrehung um eine Queraxe, welche 2 benachbarte Drehaxen (z. B. A und D) schneidet. Dadurch treten statt jedes Punktpaares 2 Paare ein, welche die Ecken eines gleichflächigen Tetraëders bilden. Also besteht das System aus lauter kongruenten parallelen gleichflächigen Tetraëdern, die so angeordnet sind, als seien 2 kongruente Systeme der rechteckigen Säule (pag. 138) parallel mitten ineinander gestellt, so dass die Centra der Tetraëder des einen Theilsystems in die Mitten der rechtwinklig parallelepipedischen Maschen des anderen fallen. Daher bilden die Centra von 6 benachbarten Tetraëdern die Ecken eines *Oblongoktaëders*.

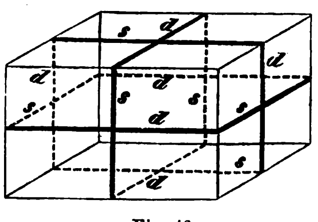
Aus der in eine Rhombendiagonale δ' fallenden Querdrehaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und den Deckschiebungen λ und $2\delta''$ folgt die Existenz von 2 parallelen Drehaxen in den Abständen $\frac{\lambda}{2}$ und δ'', gemessen parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Dass durch den Mittelpunkt desjenigen Rechtecks, welches im Queraxenschnittpunktsnetz durch diese 3 Axen bestimmt wird, eine ihnen parallele Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},\delta'}$ verlaufen muss, folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und σ'. Das vollständige Schnittpunktsnetz der Q hat also rhombische Maschen, deren Diagonalen $\frac{\lambda}{2}$ und δ'' resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. — Nicht wesentlich verschieden von dieser Queraxenschaar ist die auf ihr senkrechte Schaar der Q', nur dass die zur Hauptaxe senkrechte Diagonale der Rhombenmaschen hier $= \delta'$ ist, und dass die Schraubenaxen das Symbol $Q'_{\frac{2\pi}{2},\delta''}$ haben. 2 Querdrehaxen Q und Q' treffen eine Hauptdrehaxe in demselben Punkt. — Folglich bilden sämmtliche Drehaxen (die Haupt- und Queraxen) für sich ein rechtwinklig parallelepipedisches Netz, dessen Maschen die Kanten $\frac{\lambda}{2}$, δ', δ'' haben. Und sämmtliche Schraubenaxen bilden ein diesem Netze kongruentes Netz, dessen Knotenpunkte aber in den Mitten der Parallelepipedmaschen des vorigen liegen.

3) *Das rhombische Gegenschraubensystem*[1]) (Taf. I. Fig. 11) $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, λ, $\left(D_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma'' = \sigma', e''' = 2\delta'\right)$, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ entsteht aus dem System der klinorhombischen Säule (Spe-

1) früher: Zusammengesetztes Stufenschichtensystem erster Art.

cialisirung γ) durch Umdrehung um eine Queraxe, welche 2 benachbarte Schraubenaxen (z. B. B und C) schneidet, so dass diese beiden Axenarten je in sich selbst fallen, während die beiden Drehaxenarten A und D sich austauschen. Die mit parallelen Punktpaaren besetzten Hauptebenen des Ausgangsystems kommen durch die Umdrehung in solche Lage, dass die neuen Punktpaare sich symmetrisch zwischen die vorigen projiciren. 4 aufeinanderfolgende Hauptebenen geben dieselbe Projektion wie das ganze System. In anschaulicherer Weise fasst man das System als aus 2 zusammengesetzten rechteckigen 2-punktschraubensystemen (α, 2, pag. 139) bestehend auf, die parallel so ineinander stehen, dass die Axen der Schrauben des einen Theilsystems in den Mittellinien derjenigen Rektangulärsäulen verlaufen, die durch die Axen der Schrauben des anderen Theilsystems gebildet werden, dass aber das eine Theilsystem gegen das andere um $\frac{\lambda}{2}$ längs der Hauptaxe verschoben ist. 4 aufeinander folgende Punkte eines Cylindermantels um B bilden eine *Art unregelmässiger 4-punktschraube;* ebenso um C; doch ist die letztere entgegengesetzt gewunden wie erstere (ähnlich wie beim vierzähligen Gegenschraubensystem).

Das Schnittpunktsnetz der Queraxen Q stimmt mit demjenigen beim vorigen System überein; ebenso dasjenige der Q'. Zwei nach 2 senkrechten Richtungen verlaufende Querdrehaxen Q und Q' treffen eine Schraubenhauptaxe in 2 um $\frac{\lambda}{4}$ entfernten Punkten; und ebenso 2 Querschraubenaxen eine Drehhauptaxe. — Die 3 aufeinander senkrechten Schaaren von Drehaxen schneiden sich nicht, sondern gehn mitten zwischen einander hindurch; ebenso die 3 Schaaren von Schraubenaxen; aber jede Drehaxe wird abwechselnd von aufeinander senkrechten Schraubenaxen getroffen, und jede Schraubenaxe von solchen Drehaxen. Die gegenseitige Lage lässt sich am besten so schildern: Zieht man auf jeder der 6 Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds (mit den Kanten $\frac{\lambda}{2}$, δ', δ'') die Verbindungslinien der Mitten von je 2 parallelen Kanten, so geben diese Mittellinien die Lage der Axen an. Von 2 sich schneidenden Axen ist allemal die eine eine Drehungs-, die andere eine Schraubenaxe (Fig. 46).


Fig. 46.

Einige Specialfälle. Die Rechtecke der Projektionsfigur können sich auf Zweiecke reduciren, parallel einer Diagonalenart der Elementarrhomben. Oder jedes Rechteck reducirt sich auf seinen Mittelpunkt; so ist's z. B. wenn jedes gleichflächige Tetraëder auf ein Punktpaar oder auf seinen Mittelpunkt sich zusammenzieht: jetzt ist das System ein rechtwinklig parallelepipedisches centrirtes, d. h. also ein oblongoktaëdrisches, Raumgitter. Ferner können die Rechtecke Quadrate werden; die einzelnen, durch $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entstehenden Punktpaare können der Hauptebene parallel sein; u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Zusammengesetztes rhombisches 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

2) System des Oblongoktaëders. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

[Q schneidet 2 Drehaxen A und D.]

3) Rhombisches Gegenschraubensystem.

Deckbewegungen wie bei 2); aber Q schneidet 2 Schraubenaxen B und C.

In diesen Symbolen ist e' die zu λ senkrechte Deckschiebung längs einer Rhombenseite; σ' eine Deckschiebung, deren zur Axe A parallele, resp. senkrechte Komponente $= \frac{\lambda}{2}$ resp. $= e'$ ist. Die Queraxe Q fällt in eine Rhombendiagonale δ' oder δ''.

§ 23. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

γ) *Die 4 Axenarten tauschen sich paarweise aus, so dass immer 2 benachbarte ineinander fallen.*

Das Elementarparallelogramm ist rechteckig. Zur Ableitung der hergehörigen Systeme aus denjenigen mit zweizähligen Hauptaxen von nur einer Richtung dient die Drehung um eine Queraxe, welche mitten zwischen 2 Gegenseiten eines Elementarrechtecks verläuft; sie sei z. B. $\parallel e'$. *Die Projektionsfigur aller Systeme dieser Abtheilung besteht nach Satz 49 aus 2 Schaaren von parallelen gleichen Punktpaaren, welche symmetrisch gegeneinander stehn. Die Mittelpunkte der*

einen und der anderen Art von Punktpaaren liegen in 2 Axenarten, z. B. A und C, und bilden daher zusammen ein rechteckiges Netz (Fig. 47).

Aus dem *2-zähligen Säulensystem* entspringt das schon vorher unter α, 2 abgeleitete *zusammengesetzte rechteckige 2-punktschraubensystem.* Nämlich durch Drehung um Q geht aus einer mit parallelen Punktpaaren besetzten Hauptebene ein Hauptebenenpaar hervor, welches mit parallelen zusammengesetzten 2-punktschrauben erfüllt ist, deren Axen senkrecht zu Q verlaufen. Die Figur ist also die Projektion dieses Systems auf eine Ebene parallel den Schraubenaxen. — Aus dem 2-punktschraubensystem entspringt:

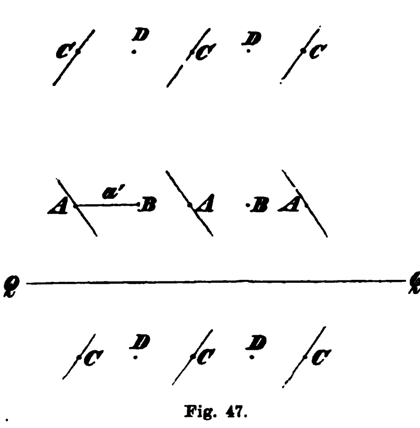


Fig. 47.

1) *Das abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensystem erster Art*[1]) (Taf. I. Fig. 12) $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, $\left(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e''\right)$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Es stehn 2 Gruppen von 2-punktschrauben mitten so ineinander, wie sie aus völlig symmetrischer (spiegelbildlicher) Stellung durch beliebige Schiebung längs der Schraubenaxe zu liegen kommen.

Diejenige Queraxenschaar, zu der die Konstruktionsaxe Q gehört, besteht nur aus Drehaxen; ihr Schnittpunktsnetz hat rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e''}{2}$ bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe (dies folgt wie beim System α, 1). Alle diese Axen verlaufen also mitten zwischen den Hauptaxen. Die andere Queraxenschaar Q' besteht nur aus Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e''}{2}}$; ihr Schnittpunktsnetz hat rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e'}{2}$, parallel und senkrecht zur Hauptaxe (wie bei α, 1). Diese Axen schneiden nur die Hauptaxen,

1) früher: Wechselschichtensystem.

gehn aber zwischen den vorigen Queraxen mitten hindurch, also um $\frac{\lambda}{4}$ von ihnen entfernt.

2) Um aus dem System der klinorhombischen Säule ein neues abzuleiten, kann man es nur in der Specialisirung α) (grade Rhombensäule) zu Grunde legen, wo sein Elementarparallelogramm rechteckig ist und beide Drehaxen durch 2 Nachbarecken (z. B. A und C) hindurchgehn; denn sonst würden sich bei der Umdrehung um die in der Mittellinie des Rechtecks verlaufende Queraxe eine Dreh- und eine Schraubenaxe austauschen sollen, was unmöglich. So entsteht

das System der Rhombensäule zweiter Art[1]) (Taf. II. Fig. 13) $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2},0}$, λ, $\left(D_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, \sigma', e''\right)$, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$. Hier liegen die beiden Theilsysteme der geraden Rhombensäule so ineinander, wie sie aus völlig symmetrischer Stellung durch beliebige Schiebung längs einer (zur Zeichnungsebene senkrechten) Axe zu liegen kommen. Die Säulenaxen verlaufen horizontal von links nach rechts.

Aus der $\parallel e'$ verlaufenden $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und σ' folgt die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},e'}$, um $\frac{\lambda}{4}$ von der ersteren entfernt im Sinne der Hauptaxen. Aus $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und e'' folgt eine parallele Drehaxe im Abstande $\frac{e''}{2}$. Also hat dieses Queraxenschnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{4}$ und $\frac{e''}{2}$, bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Alle diese Queraxen verlaufen mitten zwischen den Hauptaxen. Senkrecht gerichtet zu diesen Queraxen sind die anderen, Q', welche sämmtlich Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2},\frac{e''}{2}}$ sind. Aus einer solchen, verbunden mit λ, folgt eine parallele im Abstande $\frac{\lambda}{2}$; dagegen verbunden mit $2e'$, folgt eine parallele im Abstande e'. Hierdurch sind rechteckige Maschen des Schnittpunktsnetzes bedingt. Aber $Q'_{\frac{2\pi}{2},\frac{e''}{2}}$ verbunden mit σ' liefert eine parallele Axe, gerichtet durch die Mitte

1) früher: Zusammengesetztes Stufenschichtensystem zweiter Art.

der rechteckigen Masche. Somit hat das Schnittpunktsnetz der Q' rhombische Maschen mit den Diagonalen $\frac{\lambda}{2}$ und e', resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Eine Q', welche eine Hauptaxe A schneidet, trifft, im Abstande $\frac{a''}{2}$ von diesem Schnittpunkt, eine Drehaxe der anderen Queraxenschaar. Somit treffen alle Q' sowohl die Hauptaxen als die anderen Queraxen, während letztere beiden Axenarten schnittlos zwischeneinander hindurchgehn. Die Axen Q' haben die Richtung der Axe der Rhombensäule.

Einige Specialfälle. Die Punktpaare der Projektionsfigur können parallel stehn zu einer oder der anderen Seitenart des Elementarrechtecks; ferner können sie sich auf ihre Mittelpunkte zusammenziehn. — Die beiden Theilsysteme können so ineinanderstehn, dass sie gar nicht längs der Hauptaxe gegeneinander verschoben sind; u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem erster Art. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

2) System der Rhombensäule zweiter Art. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

Hier sind e', e'', σ' zu verstehn wie bei der Abtheilung α) § 21. Die Queraxe Q fällt mitten zwischen 2 nächste parallele e'.

§ 24. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

δ) Die 4 Axenarten tauschen sich paarweise aus, so dass immer 2 diagonal gegenüberstehende ineinander fallen.

Zur Ableitung der hergehörigen Systeme aus denjenigen mit zweizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung dient die Schraubung um eine Queraxe, welche mitten zwischen 2 Gegenseiten eines Elementarrechtecks verläuft; sie sei z. B. $\parallel e'$. *Die Projektionsfigur der hergehörigen Systeme besteht nach Satz 49 aus 2 Schaaren von parallelen gleichen Punktpaaren, deren Mittelpunkte in 2 Axenarten, z. B. A und D, liegen. Die*

eine Gruppe ist aus der völlig symmetrischen Stellung gegen die andere so herausgerückt, dass ihre Mittelpunkte in den Mitten der rechteckigen Maschen liegen, die durch die Mittelpunkte der andern gebildet werden (Fig. 48).

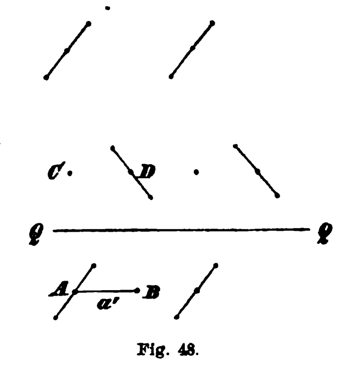


Fig. 48.

Aus dem *zweizähligen Säulensystem* entspringt das schon vorher unter γ, 1 abgeleitete *abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensystem erster Art.* Nämlich durch Schraubung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$ geht aus einer mit Punktpaaren besetzten Hauptebene ein Hauptebenenpaar hervor, welches mit abwechselnd parallelen 2-punktschrauben erfüllt ist, deren Schraubenaxen mit der Konstruktionsaxe parallel laufen. Die Figur ist also eine Projektion des Systems auf eine Ebene parallel diesen Schraubenaxen.

Um ferner aus dem System der klinorhombischen Säule, ein hergehöriges abzuleiten, könnte nur der Specialfall β) dienen, wo das Elementarparallelogramm rechteckig ist, und die diagonal gegenüberstehenden Axen gleichartig sind, nämlich ein Paar Drehaxen, das andere Paar Schraubenaxen. Das Symbol dieses Systems ist $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, λ, $\left(D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'', e'''\right)$. Fügt man nun die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$ hinzu, und wendet sie zwei Mal nacheinander an, so ist dies identisch mit einer Schiebung e'. Dies ist nun von vorn herein keine Deckschiebung des Systems. Fügt man sie hinzu, so verwandelt sich das Ausgangssystem in das 2-zählige Säulensystem, von welchem eben gezeigt ist, dass es auf kein neues hergehöriges System führt.

Nur aus dem 2-punktschraubensystem geht ein hergehöriges neues System hervor:

1) *Das abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensystem zweiter Art*[1]) (Taf. II. Fig. 14) $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, λ,

---

1) früher: Rhombisches Wechselstreifensystem.

$\left(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e''\right)$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$. Hier sind 2 kongruente Gruppen von 2-punktschrauben entgegengesetzt mitten durcheinander gesteckt, so dass die Axen der Schrauben einer Gruppe in den Mittellinien derjenigen Rektangulärsäulen verlaufen, die durch die Axen der Schrauben der anderen Gruppe gebildet werden.

Aus der mitten zwischen zwei e' verlaufenden Axe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$, verbunden mit der Deckschiebung λ, resp. mit e'', folgt die Existenz paralleler Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$ im Abstande $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e''}{2}$. Also haben diese Queraxen ein rechteckiges Schnittpunktsnetz, dessen Maschenseiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e''}{2}$ resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Auch das Netz der hierzu senkrechten Queraxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e''}{2}}$ hat rechteckige Maschen und zwar mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e'}{2}$. Keine Axe schneidet die andere, sondern beide Queraxenschaaren gehn mitten zwischeneinander im Abstande $\frac{\lambda}{4}$, und zwischen den Hauptaxen in den Abständen $\frac{e''}{4}$ resp. $\frac{e'}{4}$ hindurch (Fig. 49). Denkt man in Textfig. 46 die Parallelepipedkanten resp. $= \frac{\lambda}{2}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$, und lässt man sämmtliche mit d bezeichneten Mittellinien fort, so geben die übrig gebliebenen Mittellinien s die gegenseitige Lage der Axen dieses Systems an.

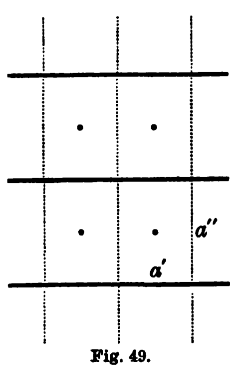


Fig. 49.

Einige Specialfälle. Hier gilt dasselbe wie bei γ) (§ 23).

Einziges Punktsystem dieser Abtheilung.

1) Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem zweiter Art. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$.

Die Deckschiebungen e', e'', λ sind senkrecht auf einander. Die Queraxe Q fällt mitten zwischen 2 nächste parallele e'.

Capitel VII.

Punktsysteme mit gleichen Hauptaxen nach mehr als zwei Richtungen.

§ 25. Konstruktion der Systeme mit 3-zähligen gleichen Hauptaxen, parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Tetraëders.

Die hergehörigen Systeme besitzen nach Satz 18 ausser den dreizähligen Axen, die parallel den Radien nach den Ecken eines Tetraëders gerichtet sind, noch andere dreizählige Axen von entgegengesetzten Richtungen, und zweizählige unter einander gleiche Axen parallel den Radien nach den Tetraëderkantenmitten. Diese letzteren Axen bilden also 3 Paare von je entgegengesetzt gerichteten Schaaren, und zwar verläuft jede Doppelschaar senkrecht zu den beiden anderen. Die 3 Doppelschaaren sind einander kongruent; denn sie müssen durch die Deckbewegungen um die dreizähligen Axen ineinander übergeführt werden.

Immer wenn in einem regelmässigen Punktsystem zweizählige gleiche Axen nur nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, müssen nach Satz 16 noch andere zweizählige Axen vorhanden sein, und zwar erstens solche, die senkrecht zu den vorigen nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, und zweitens solche, die senkrecht zu beiden vorigen Doppelschaaren ebenfalls nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Die bei solchen Axenrichtungen (längs 3 aufeinander senkrechten Geraden) überhaupt möglichen verschiedenen Anordnungsarten der zweizähligen Axen sind in den §§ 21—24 erschöpfend abgeleitet. Von jenen Anordnungsarten stellen die in der vorliegenden Abtheilung auftretenden Anordnungen in sofern Specialfälle vor, als die 3 Paare von je entgegengesetzt gerichteten zweizähligen Axenschaaren, die dort ungleich waren, hier untereinander kongruent sind, — womit zugleich das Vorhandensein dreizähliger Axen verknüpft ist, die gleich geneigt gegen jene 3 senkrechten Schaarenpaare liegen und dieselben ineinander überführen.

Man konstruirt also alle Systeme der vorliegenden Abtheilung dadurch, dass man bei den Systemen der §§ 21—24

die beiden Paare von Queraxenschaaren untereinander und mit den Hauptaxen kongruent sein lässt (falls dies überhaupt möglich ist), und darauf die Deckbewegung um eine der 3-zähligen Axen 2 mal nacheinander ausführt. Dadurch kommen die 2-zähligen Axen immer nur in Lagen, die schon vorher von gleichen 2-zähligen Axen besetzt waren. Das ganze System aber besteht jetzt aus 3 kongruenten Theilsystemen, die nach 3 senkrechten Richtungen durcheinander gesteckt sind. *Neben den zu diesen 3 Theilsystemen gehörigen Punkten kann kein anderer vorhanden sein.* Ein solcher müsste nämlich mit jedem anderen Systempunkt zur Deckung bringbar sein, so dass zugleich das ganze System mit sich zur Deckung käme. Die dazu erforderliche Deckbewegung würde neue Lagen von zweizähligen Axen nach sich ziehn; solche kann es aber nicht geben, denn 1) können 2-zählige Axen nicht nach anderen als den 3 aufeinander senkrechten Richtungen verlaufen (Satz 18), und 2) können auch in jeder dieser Richtungen Axen nur eine der früher abgeleiteten Anordnungsarten haben. — Hiermit sind sämmtliche Systeme dieser Abtheilung konstruirt. Denn wenn es noch ein anderes gäbe, so würde man, falls man die Deckbewegungen um die dreizähligen Axen aus ihm wegliesse, ein regelmässiges System mit 3 Paaren senkrechter Axenschaaren übrig behalten, welches *nicht* mit einem der früher konstruirten identisch wäre. Dies aber ist nicht möglich, weil alle Systeme mit nur 2-zähligen Axen dort (§§ 21—24) erschöpfend abgeleitet worden sind.

Bei der Hälfte aller Systeme der §§ 21—24 erweist es sich nun als unmöglich, dass die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von 2-zähligen Axen einander kongruent werden; nämlich überall da, wo die eine Doppelschaar Drehaxen enthält, die andere nicht; oder wo die eine Doppelschaar Schraubenaxen enthält, die andere nicht. Aus solchen Systemen entspringen also keine hierher gehörigen. So verhält es sich zunächst mit einigen 2-punktschraubensystemen, nämlich mit dem zusammengesetzten rechteckigen, dem zusammengesetzten rhombischen, und dem abwechselnden rechteckigen erster Art (§ 21, 2; § 22, 1; § 23, 1); denn diese sind durch Drehung um eine Queraxe abgeleitet, ihre Queraxenschaaren enthalten also nothwendiger Weise Drehaxen; die Hauptaxen dagegen sind sämmtlich Schraubenaxen. Beim

System der Rhombensäule erster Art (§ 21, 3) sind die Hauptaxen theils Dreh-, theils Schraubenaxen, ebenso die Queraxenschaar Q', während die andre Queraxenschaar Q nur aus Drehaxen besteht. Auch sind hier die Schnittpunktnetze der erstgenannten beiden Axenarten rechteckig und ihre Maschenseiten sind parallel und senkrecht zur Hauptaxe; dagegen ist das Schnittpunktsnetz der Q rhombisch, und die Maschendiagonalen sind parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Die Kongruenz der 3 Doppelschaaren von Axen ist also hier ausgeschlossen. — Endlich beim System der Rhombensäule zweiter Art (§ 23, 2) bestehn die Hauptaxen und auch die Queraxen Q zur Hälfte aus Dreh-, zur Hälfte aus Schraubenaxen, während die anderen Queraxen Q' sämmtlich Schraubenaxen sind. Auch ist nur das Schnittpunktsnetz der letzteren rhombisch, während die Netze der beiden ersteren rechteckig sind. Also ist auch hier die Kongruenz der 3 Doppelschaaren von Axen unmöglich. — Zur Ableitung hergehöriger Systeme bleiben also nur die Systeme 1) und 4) des § 21, 2) und 3) des § 22, und 1) des § 24 übrig.

1) *Das kubische 12-punktnersystem*, $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, e', e'', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ $\left(\text{wo } e' = e'' = \lambda\text{, wo ferner } Q \text{ in } e'\text{, und } R \text{ in die Diagonale eines Würfels mit den Kanten } \frac{\lambda}{2} \text{ fällt}\right)$ entspringt aus dem System der rechteckigen Säule (§ 21, 1). Weil in letzterem sämmtliche Axen 2-zählige Drehaxen sind, und weil ihre Gesammtheit ein rechtwinklig parallelepipedisches Axennetz mit den Parallelepipedkanten $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e'}{2}$, $\frac{e''}{2}$ bildet, so hat man nur $\lambda = e' = e''$ zu machen, um die Kongruenz der 3 Doppelschaaren von Axen herbeizuführen. Dieselben gelangen miteinander zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche in der Diagonale einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen $\left(\text{Kante} = \frac{\lambda}{2}\right)$ des erwähnten Axennetzes liegt. Also sind 3 rechteckige Säulensysteme, bei denen die Centra der gleichflächigen Tetraëder ein kubisches Netz (mit Kante λ) bilden, nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Würfel-

[illegible] dass immer 3 Säulen-
[illegible] senkrecht stehn. Dieser
[illegible] gleichflächigen Tetraëdern
[illegible] Richtungen durcheinander
[illegible] Axen cyklisch vertauscht sind.
[illegible] zusammen einen Körper, wel-
[illegible] mag. Die Figur 54, Taf. V, ist die
[illegible] auf eine durch zwei 2-zählige Axen
[illegible] Ebene. Der 12-punktner hat 12 kongruente Ecken;
[illegible] sind 2 Gruppen von je 4 kongruenten
[illegible] Dreiecken, ferner 12 kongruente ungleichseitige
[illegible] Durch sein Centrum gehn ausser den 3 aufeinander
[illegible] 2-zähligen Drehaxen noch vier 3-zählige Dreh-
axen, welche mitten in die Oktanten der vorigen hineinragen.
Durch Drehung um jede dieser Axen kommt der 12-punktner
mit sich zur Deckung. — Das vorliegende System besteht
nur aus lauter kongruenten parallelen 12-punktnern, deren
Centra ein kubisches Raumgitter bilden.

2. *Das oktaëdrische 12-punktnersystem* $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, σ', σ'', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},}$, $R_{\frac{2\pi}{3},}$ (wo $e' = e'' = \frac{\lambda}{2}$, wo ferner Q in e', und R in eine gewisse Diagonale eines Würfels mit den Kanten $\frac{\lambda}{4}$ fällt), entspringt aus dem Rhombenoktaëdersystem (§ 21, 4). In diesem besteht jede der drei aufeinander senkrechten Doppelschaaren halb aus Dreh- und halb aus Schraubenaxen, und alle zusammen bilden ein rechtwinklig parallelepipedisches Axennetz mit den Kanten $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{e'}{2}$, $\frac{e''}{2}$; dabei stossen in 2 entferntest gegenüberliegenden Parallelepipedecken je 3 Drehaxen zusammen, während in den übrigen 6 Kanten Schraubenaxen liegen. Macht man nun $\frac{\lambda}{2} = e' = e''$, so werden die 3 Doppelschaaren von Axen kongruent. Sie gelangen miteinander zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche durch jene 2 ausgezeichneten Ecken einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen $\left(\text{Kante} = \frac{\lambda}{4}\right)$ des erwähnten Axennetzes hindurchgeht.

Also sind 3 Rhombenoktaëdersysteme, bei denen die Centra der gleichflächigen Tetraëder ein regulär oktaëdrisches Gitter (vergl. Nr. 14 der Bravais'schen Tabelle, pag. 21) bilden, nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Oktaëderaxen, durcheinander gesteckt, so dass immer 3 gleichflächige Tetraëder denselben Mittelpunkt haben und somit einen 12-punktner bilden. Das System besteht also aus lauter kongruenten parallelen 12-punktnern, deren Centra ein regulär oktaëdrisches Raumgitter bilden.

3) *Das rhombendodekaëdrische 12-punktnersystem*[1]) $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, σ', σ', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, $\left(\text{wo } \delta' = \delta'' = \frac{\lambda}{2}\right.$, wo ferner Q in δ' fällt und 2 Drehaxen schneidet, und endlich R in die Diagonale eines Würfels mit Kante $\left.\frac{\lambda}{2} \text{ fällt}\right)$, entspringt aus dem System des Oblongoktaëders (§ 22, 2). Letzteres besitzt gleichviel Drehaxen und Schraubenaxen; die Drehaxen bilden für sich ein rechtwinklig parallelepipedisches Netz mit den Maschenkanten $\frac{\lambda}{2}$, δ', δ''; ein diesem kongruentes Netz bilden die Schraubenaxen, doch liegen seine Knotenpunkte in den Mittelpunkten der Maschen des ersteren Netzes. Macht man nun $\frac{\lambda}{2} = \delta' = \delta''$, so werden die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von Axen einander kongruent. Sie gelangen zur Deckung sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche in die Diagonale einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen $\left(\text{Kante} = \frac{\lambda}{2}\right)$ des erwähnten Axennetzes fällt. Jetzt finden sich 3 Oblongoktaëdersysteme, bei denen die Centra der gleichflächigen Tetraëder ein kubisches centrirtes Raumgitter bilden (vergl. Nr. 13 der Bravais'schen Tabelle, pag. 21) nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Würfelkanten, durch einander gesteckt, so dass immer 3 gleichflächige Tetraëder denselben Mittelpunkt haben und folglich einen 12-punktner bilden. Das System besteht also aus lauter kongruenten parallelen 12-punktnern, deren Centra ein kubisches centrirtes Raumgitter

1) früher: Granatoëdrisches 12-punktnersystem.

bilden, welches man auch als „rhombendodekaëdrisches“ bezeichnen kann, indem die 8 Ecken eines Würfels, zusammen mit den Mitten der 6 an seinen Flächen anliegenden Würfel, die Ecken eines Rhombendodekaëders bilden.

4) *Das reguläre zusammengesetzte 2-punktschraubensystem* [1]) $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, σ', σ', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ $\left(\text{wo } \frac{\lambda}{2} = \delta' = \delta'',\right.$ wo ferner Q in δ' fällt und 2 Schraubenaxen schneidet, und endlich R in die Diagonale eines Würfels mit Kante $\left.\frac{\lambda}{2}\right)$, Taf. IV, Fig. 57,[2]) entspringt aus dem rhombischen Gegenschraubensystem (§ 22, 3). In letzterem verläuft die Gesammtheit der Axen wie die Mittellinien der Seitenflächen rechtwinklig parallelepipedischer Netzmaschen mit den Kanten $\frac{\lambda}{2}$, δ', δ''; hier schneiden sich stets je eine Dreh- und eine Schraubenaxe, und zwar in den Mitten sowohl der Flächen als der Kanten der Parallelepipede. Macht man nun $\frac{\lambda}{2} = \delta' = \delta''$, so werden die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von Axen einander kongruent. Sie gelangen zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche in die Diagonale einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen $\left(\text{Kante} = \frac{\lambda}{2}\right)$ des erwähnten parallelepipedischen Netzes fällt. Jetzt finden sich 3 rhombische Gegenschraubensysteme, deren Rhomben in Quadrate verwandelt sind (mit Diagonale = der halben Schraubenhöhe), nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Quadratdiagonalen und der Schraubenaxe, durcheinander gesteckt, so dass die Axen von 3 nächsten zusammengesetzten 2-punktschrauben ohne Schnitt zwischeneinander hindurchlaufen, gelegen wie 3 nicht zusammenhängende, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende, Kanten eines Würfels von der Kante $\frac{\lambda}{4}$.

5) *Das reguläre abwechselnde 2-punktschraubensystem* [3])

---

1) früher: Reguläres Stufenschichtensystem.

2) Zum Verständniss der Figur vergleiche man die den Tafeln vorgedruckte Erklärung.

3) früher: Reguläres Wechselstreifensystem.

$A_{2\pi}{}_{\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}}$, e', e'', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{e'}{2}}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \lambda$, wo ferner Q mitten zwischen 2 nächste parallele e', und R in die Diagonale eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{2}$ fällt), Taf. IV. Fig. 58, entspringt aus dem abwechselnden rechteckigen 2-punktschraubensystem zweiter Art (§ 24). In letzterem sind alle Axen Schraubenaxen, die schnittlos zwischeneinander hindurchgehn, gelegen wie die Linien s in der Textfig. 46, in welcher man den Parallelepipedkanten die Längen $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e'}{2}$, $\frac{e''}{2}$ ertheilt hat. Macht man jetzt $\lambda = e' = e''$, so werden die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von Axen einander kongruent. Sie gelangen zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine 3-zählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, die in die Diagonale einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen $\left(\text{Kante} = \frac{\lambda}{2}\right)$ des erwähnten parallelepipedischen Netzes fällt. Jetzt finden sich 3 abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensysteme zweiter Art nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Würfelkanten, durcheinander gesteckt, so dass die Axen von 3 nächsten 2-punktschrauben ohne Schnitt zwischen einander hindurchlaufen, gelegen wie 3 nicht zusammenhängende, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende, Kanten eines Würfels von der Kante $\frac{\lambda}{4}$.

Einige Specialfälle. Bei jedem der 3 ersten Systeme kann der 12-punktner z. B. in das reguläre Tetraëder oder in das mit dem Pentagondodekaëder verbundene Oktaëder übergehn; auch kann er sich auf seinen Mittelpunkt reduciren, wobei das System in eins der 3 regulären Bravais'schen Raumgitter übergeht. Ferner ist zu bemerken, dass das dem 12-punktner zu Grunde liegende gleichflächige Tetraëder im Allgemeinen die eine oder die andere von 2 enantiomorphen Gestalten sein muss (vergl. pag. 112), so dass es ebenfalls 2 enantiomorphe 12-punktner giebt. — Die Systeme 1) und 3) lassen noch eine eigenthümlich andere Auffassung zu: Bei 1) bilden die 2 einander zugewandten Punktpaare je zweier nächster 12-punktner ein gleichflächiges Tetraëder. Daher lässt sich dies System, statt aus 12-punktnern, aus diesen isolirten

Tetraëdern aufgebaut denken, deren Centra in den Würfelkanten des kubischen Netzes liegen, das durch die Mitten der 12-punktner bestimmt war. Die Gesammtheit dieser Tetraëder bildet natürlich auch 3 senkrecht durcheinander gesteckte Systeme der rechteckigen Säule (mit kubischer Masche). Bezeichnet man mit 1, 2, 3 das gleichflächige Tetraëder in den 3 Stellungen, in die es durch dreizählige Drehungen gelangt [diese Stellungen sind parallel jenen, die es im 12-punktner einnimmt], so stellt Fig. 50 die Projektion zweier benachbarter, mit Tetraëdercentren besetzter Ebenen auf eine Würfelmaschenseite vor. Die Centra der Tetraëder 2 und 3 liegen in der Zeichnungsebene oder um ein ganzes Vielfaches von λ von ihr entfernt; die Centra 1 stehn von der Zeichnungsebene um ein ungrades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ab; dies soll durch die Einklammerung der Zahlen (1) ausgedrückt sein. Statt dieser isolirten Tetraëder können nun reguläre oder quadratische Tetraëder oder je 4 Eckpunkte eines Rechtecks oder Quadrats oder auch Punktpaare oder sogar einzelne Punkte (in den Tetraëdermitten) eintreten. — In entsprechender Weise lässt sich das System 3) als aus 2 mitten ineinander gestellten Systemen der vorigen Art gebildet ansehn. Dies veranschaulicht die Fig. 51, die analog der vorigen zu verstehn ist. — Die Specialfälle der beiden regulären 2-punktschraubensysteme sind analog denen der einfachen Systeme, aus denen die regulären abgeleitet sind.

Fig. 50.

Fig. 51.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Kubisches 12-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, e', e'', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \lambda$ ist und Q in e' fällt).

2) Oktaëdrisches 12-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, σ', σ'', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ $\left(\text{wo } e' = e'' = \frac{\lambda}{2} \text{ ist und } Q \text{ in } e' \text{ fällt}\right)$.

3) Rhombendodekaëdrisches 12-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, σ', σ', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ $\left(\text{wo } \delta' = \delta'' = \frac{\lambda}{2} \text{ ist und } Q \text{ in } \delta' \text{ liegend 2 Drehaxen schneidet}\right)$.

4) Reguläres zusammengesetztes 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, σ', σ', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ $\left(\text{wo } \delta' = \delta'' = \frac{\lambda}{2} \text{ ist und } Q \text{ in } \delta' \text{ liegend 2 Schraubenaxen schneidet}\right)$.

5) Reguläres abwechselndes 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, e', e'', λ, $Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{e'}{2}}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \lambda$ ist und Q mitten zwischen 2 nächste e' fällt).

In allen Symbolen ist R die Diagonale eines gewissen Würfels, dessen Lage bei der Beschreibung jedes einzelnen Systems genau angegeben ist.

§ 26. Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Oktaëders.

Die hergehörigen Systeme besitzen nach Satz 18 ausser den Hauptaxen noch 3-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Flächenmitten des Oktaëders, und 2-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Kantenmitten desselben. Die Hauptaxen bilden 3 Paare von je entgegengesetzt gerichteten Schaaren, verlaufend parallel dreien aufeinander senkrechten Geraden; und diese 3 Doppelschaaren sind einander kongruent, denn sie müssen durch die Deckbewegungen um die 3-zähligen Axen, welch' letztere ja mit-

ten in die durch jene Axenrichtungen bestimmten Oktanten hineinragen, in einander übergeführt werden.

Fasst man zunächst nur *eine* Doppelschaar von Hauptaxen in's Auge, so ist die einzig mögliche Anordnung für die sie bildenden 4-zähligen Axen von 2 entgegengesetzten Richtungen und für die gleichgerichteten zweizähligen Axen im Satz 29 nebst Zusätzen (Fig. 17) abgeleitet. Das Vorhandensein einer solchen Doppelschaar ist nach Satz 16 nothwendig verknüpft mit dem Vorhandensein von 2 Arten 2-zähliger Queraxen Q und Q', deren jede Art längs 2 aufeinander senkrechten Geraden verläuft und die Winkel der Richtungen der anderen Art halbirt. Für die Queraxen sind sämmtliche überhaupt mögliche verschiedene Anordnungsarten in den §§ 17 und 18 erschöpfend abgeleitet. Auch in den Systemen der vorliegenden Abtheilung muss die eine in's Auge gefasste Doppelschaar 4-zähliger Axen von den 2-zähligen Queraxen Q und Q' begleitet sein. — Was nun die zweite und dritte Doppelschaar von Hauptaxen nebst den zugehörigen 2-zähligen Axen von gleicher Richtung angeht, so können zunächst ihre *Richtungen* (die ja senkrecht aufeinander und auf der ersten Doppelschaar sind), keine anderen sein als die der Queraxen Q oder Q' der ersten Schaar; denn sonst würden noch neue Lagen für die Hauptaxen der ersten Doppelschaar gefordert werden, was unmöglich ist. Aber auch die *absolute Lage* dieser zweiten und dritten Doppelschaar von Axen kann keine andere sein als die jener Queraxen Q oder Q'; d. h. *die zweite und dritte Doppelschaar muss in eine Art der Queraxen (Q oder Q') der ersten Doppelschaar gänzlich hineinfallen.* Angenommen nämlich, dies wäre nicht der Fall, so würde die Gesammtheit der Axen der zweiten und dritten Doppelschaar durch die *nicht* mit ihnen zusammenfallenden Queraxen der ersten vermehrt werden. Dann müsste — wegen der Kongruenz der 3 Doppelschaaren — auch die erste Doppelschaar noch mehr 2-zählige Axen enthalten; und das ist unmöglich (Satz 29 und Zusatz 2). Somit bleibt nur übrig, dass die zur ersten Doppelschaar gehörigen Queraxen Q oder Q' mit der ersten Doppelschaar selber kongruent werden.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass gewisse 2-zählige Queraxen zugleich 4-zählig werden müssen; dies erfordert,

dass die zweimalige Ausführung der 4-zähligen charakteristischen Deckbewegung identisch sei mit der charakteristischen 2-zähligen Bewegung um die Axe. Nun giebt es nur folgende charakteristische Deckbewegungen 4-zähliger Axen: $A_{\frac{2\pi}{4},0}$, $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$, $A_{\frac{2\pi}{4},\pm\frac{\lambda}{4}}$. Durch zweimalige Ausführung einer jeden derselben entstehn die zweizähligen Bewegungen: $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $A_{\frac{2\pi}{2},\lambda} = A_{\frac{2\pi}{2},0}$ (weil λ allein schon eine Deckbewegung ist), und $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$. In Worten: *Eine zweizählige Schraubenaxe kann zugleich eine 4-zählige Schraubenaxe von halber Schiebungskomponente sein. Für eine 2-zählige Drehaxe giebt es aber 2 Möglichkeiten, zugleich 4-zählig zu sein, nämlich entweder als 4-zählige Drehaxe oder als 4-zählige Schraubenaxe mit einer Schiebungskomponente, die halb so gross als die kleinste Deckschiebung jener Richtung ist.*

Ausser dieser Fähigkeit gewisser 2-zähliger Axen: zugleich 4-zählig zu sein, ist zur Kongruenz einer Doppelschaar 4-zähliger (und ihnen paralleler 2-zähliger) Axen mit einer zugehörigen Queraxenschaar noch zweierlei erforderlich: Erstens müssen die betreffenden beiden Schnittpunktsnetze auf senkrecht schneidenden Ebenen durch passende Wahl der Dimensionen kongruent werden können; und zweitens müssen diese Netze so gegeneinander liegen, dass sie durch Bewegung um eine der zum System gehörigen Axen auch wirklich zur Deckung gelangen können. Diese letztere Bedingung wird jetzt noch weiter untersucht. Eine 4-zählige Axe der dritten Doppelschaar läuft parallel der Schnittlinie der Ebenen der beiden fraglichen Schnittpunktsnetze (LL' oder $L'L''$ der Fig. 35, 36, 38 auf S. 119, 120, 125); also müssen beide Netze durch 4-zählige Bewegung um eine zu dieser Linie parallele Axe zur Deckung kommen können. Nun hat das Schnittpunktsnetz einer Doppelschaar 4-zähliger und gleichgerichteter 2-zähliger Axen quadratische Maschen (Fig. 17), deren Seiten $\frac{e}{2}$ parallel und senkrecht zur Schnittlinie $L'L''$ (Fig. 35, 36, 38) der Hauptebene mit der Schnittpunktsebene der Queraxen Q' verlaufen. Das Schnittpunktsnetz dieser Queraxen Q' hat aber rechteckige Maschen, deren Seiten parallel und senkrecht zu

jener Schnittlinie $L'L''$ liegen. Also können beide Netze durch 4-zählige Bewegung um eine zu $L'L''$ parallele Axe zur Deckung gelangen, falls die rechteckige Masche mit der quadratischen kongruent wird. Das Schnittpunktsnetz der anderen Queraxen Q hat entweder rechteckige Maschen, deren Seiten parallel und senkrecht zur Schnittlinie LL' dieser Netzebene mit der Hauptebene verlaufen (Fig. 35 und 38), oder rhombische Maschen, deren Diagonalen parallel und senkrecht zu LL' sind (Fig. 36). Weil nun in der Hauptebene die Diagonalen der quadratischen Maschen auch parallel und senkrecht zu LL' liegen, so ist durch 4-zählige Bewegung um eine zu LL' parallele Axe das Netz der Q *nur im Falle rhombischer Maschen* mit dem Hauptebenennetze deckbar; dazu gehört, dass die Rhomben den Quadraten der Hauptebene kongruent werden.

Zur Ableitung der Systeme der vorliegenden Abtheilung hat man also nacheinander sämmtliche Systeme mit 4-zähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen darauf hin zu untersuchen, ob durch passende Wahl des Grössenverhältnisses der Deckschiebungen parallel und senkrecht zur Hauptaxe Kongruenz der einen oder anderen Queraxenschaar mit der zur Hauptaxenrichtung parallelen Axenschaar herbeiführbar ist, wozu nach Vorigem gehört: 1) Kongruenz der beiden Schnittpunktsnetze. 2) Richtige gegenseitige Lage derselben. 3) Fähigkeit gewisser 2-zähliger Axen, zugleich 4-zählig zu sein. Sobald gegen diese 3 Forderungen kein Widerspruch entsteht, ist ein System der neuen Gattung ohne Weiteres konstruirbar: Man hat nur das zum Ausgang gewählte 4-zählige System (des § 17 oder 18) durch die charakteristische Bewegung um eine jetzt 4-zählig gewordene Queraxe in eine neue Lage zu bringen, so dass jetzt die 4-zähligen Hauptaxen senkrecht zur ursprünglichen Richtung verlaufen, und dieses Theilsystem durch die charakteristische Bewegung um eine Hauptaxe des Ausgangssystems wiederum in eine neue Lage, so dass nun die 4-zähligen Axen zu den beiden vorigen Richtungen senkrecht verlaufen. Dadurch werden, nach dem Vorigen, keine neuen Axenlagen hervorgebracht; aber es werden neue Punkte des Raums mit Systempunkten besetzt; hier mussten also von vornherein schon Systempunkte liegen, weil ja alle ausgeführten Bewegungen

Deckbewegungen waren. Zufolge dieser Ableitung besteht also das neue System aus 3 kongruenten, nach 3 senkrechten Richtungen durcheinander gesteckten Theilsystemen (des § 17 oder 18). Eins derselben gelangt in die Lage des zweiten durch 4-zählige Deckbewegung um eine Axe des dritten, während letzteres dabei mit sich selbst zur Deckung kommt. — (Weil die Existenz der 4-zähligen gleichen Axen parallel 3 senkrechten Geraden die Existenz von 3-zähligen Axen nach sich zieht, lässt sich die Konstruktion der hergehörigen Systeme auch so ausführen: Aus einem System des § 17 oder 18 geht durch *3-zählige* Bewegungen um gewisse Axen das zweite und dritte der durcheinander gesteckten Theilsysteme hervor). *In einem System dieser Abtheilung kann kein anderer Punkt neben den zu den 3 Theilsystemen gehörigen Punkten existiren.* Nämlich er müsste mit jedem anderen Systempunkt zur Deckung gebracht werden können, so dass zugleich das ganze System mit sich zur Deckung käme. Dies würde nur durch eine neue Deckbewegung möglich sein. Eine solche aber würde neue Lagen der Hauptaxen nach sich ziehn, was unmöglich, weil alle für sie möglichen Lagen schon konstruirt sind.

Es werden nacheinander die Systeme des § 17 in der Reihenfolge 1, 2, 5, 6, 3, 4, und dann die Systeme des § 18 in der Reihenfolge 3, 4, 1, 2 zur Ableitung neuer Systeme zu Grunde gelegt.

Aus dem *zusammengesetzten 4-punktschraubensystem* (§ 17, 1 und 2) leitet sich kein hergehöriges System ab; denn die vorher angestellten Ueberlegungen lehren, dass das Schnittpunktsnetz der Q mit dem Netz der Hauptebene überhaupt nicht deckbar ist (Textfig. 35); und ferner dass das Schnittpunktsnetz der Q' zwar dem Netze der Hauptebene kongruent werden kann, dass aber beide Axenschaaren trotzdem nicht gleich werden können, weil sämmtliche Q' Drehaxen, sämmtliche Hauptaxen aber Schraubenaxen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ sind.

1) *Das kubische 24-punktnersystem* $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}$ [Q' in e; $e = \lambda$] entspringt aus dem zusammengesetzten Quadratsäulensystem 5) des § 17. Das Netz der Q (Textfig. 35) ist zwar mit dem Netze der Hauptebene nicht deckbar; aber dasjenige der Q' wird

dem Hauptebenennetze kongruent, wenn man $\lambda = e$ macht. Alle Axen des Ausgangssystems, sowohl diejenigen in der Hauptaxenrichtung als die Queraxen, sind Drehaxen; also können 2-zählige Queraxen ohne Weiteres zu vierzähligen Drehaxen werden. Vierzählige Drehung um eine zu $L'L''$ der Textfig. 35, und folglich auch zu e parallele Axe versetzt eine Hauptaxe A in eine Axe Q'; diese werde jetzt A' genannt. Eine jetzt ausgeführte 4-zählige Drehung um eine Hauptaxe A des Ausgangssystems versetzt A' in die neue Lage A''. Also sind 3 zusammengesetzte Quadratsäulensysteme, deren Säulencentra ein kubisches Raumgitter bilden, nach 3 senkrechten Richtungen, — denen der Würfelkanten — durcheinander gesteckt, so dass immer 3 Säulenaxen A, A', A'' in einem Punkt aufeinander senkrecht stehn. Letzterer ist also der Mittelpunkt von 3 gewundenen Säulen zugleich, die nach 3 senkrechten Richtungen ($\|$ e, e und λ) durcheinandergesteckt sind. Ihre 24 Eckpunkte bestimmen zusammen einen Körper, welcher *„24-punktner“* heissen mag; er hat 24 kongruente Ecken. Man erhält ihn, wenn man von allen Flächen eines 48-flächners eine um die andere in gleicher Weise mit einem Punkte besetzt; oder man erhält ihn, wenn man zwei 12-punktner so ineinander stellt, dass sie ineinander übergehn durch 4-zählige Drehung um eine ihrer 2-zähligen Axen. Die Fig. 59, Taf. V zeigt seine Projektion auf eine Ebene senkrecht zu einer solchen Axe. Durch sein Centrum gehn ausser den 3 aufeinander senkrechten 4-zähligen Drehaxen noch vier 3-zählige Drehaxen, mitten in die Oktanten der vorigen hineinragend. Durch Drehung um jede dieser Axen kommt der 24-punktner mit sich zur Deckung. — Das vorliegende System besteht aus lauter kongruenten parallelen 24-punktnern, deren Centra ein kubisches Raumgitter bilden.

2) *Das rhombendodekaëdrische 24-punktnersystem*[1]) $A_{\frac{2\pi}{4},0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{4},0}\left[Q \text{ in } a;\ a = \frac{\lambda}{2}\right]$ entspringt aus dem zusammengesetzten Quadratoktaëdersystem 6) des § 17. Nämlich das Schnittpunktsnetz der Q (Textfig. 36) wird mit dem Hauptebenennetze deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = a$ macht. Die beiden Hauptaxenarten

1) früher: Granatoëdrisches 24-punktnersystem.

A und B sind Drehaxen, die ihnen parallelen C sind 2-zählige Schraubenaxen $= C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$. Weil nun die Queraxen Q zum Theil Drehaxen, zum Theil Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ sind, so wird ihre Gesammtheit deckbar mit den A, B, C, sobald $a = \frac{\lambda}{2}$ ist. Bei letzterer Annahme bilden die Centra aller gewundenen Säulen des Quadratoktaëdersystems 2 mitten ineinander gesetzte kubische Raumgitter (Würfelkante $= \lambda$), so dass die Punkte des einen Gitters die Mitten der Würfelmaschen des anderen einnehmen. Nun geht eine zu a parallele Querdrehaxe Q durch das Centrum einer gewundenen Säule; führt man um sie eine 4-zählige Drehung aus, so wird eine Hauptaxe in eine zu ihr senkrechte Lage A' geführt; und 4-zählige Drehung um die ursprüngliche A führt A' in die Lage A'', senkrecht auf beiden vorigen. Also sind 3 Quadratoktaëdersysteme der speciellen beschriebenen Art nach 3 senkrechten Richtungen ($\parallel a, a$ und λ) durcheinander gesteckt, so dass immer drei 4-zählige Axen in einem Punkt aufeinander senkrecht stehn. Dieser Punkt ist dann der Mittelpunkt eines 24-punktners. Indem somit für jede gewundene Säule des Ausgangssystems ein 24-punktner eintritt, so besteht das ganze System aus lauter kongruenten parallelen 24-punktnern, deren Centra ein kubisches centrirtes Raumgitter, d. h. dasjenige des Rhombendodekaëders, bilden. (Vergl. Bravais' Raumgitter 13 pag. 21, sowie § 25, 3).

3) *Das oktaëdrische 24-punktnersystem*, $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, λ, σ, $Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, $\left[Q' \text{ in } e;\ e = \frac{\lambda}{2}\right]$ entspringt wie das vorhergehende aus dem zusammengesetzten Quadratoktaëdersystem. Nämlich das Schnittpunktsnetz der Q' (Textfig. 36) wird mit dem Hauptebenennetze deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = e$ macht. Die Queraxen sind zum Theil Drehaxen, zum Theil Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$. Erstere werden daher mit den A und B, letztere mit den $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$ deckbar, sobald $\frac{\lambda}{2} = e$ ist. Bei letzterer Annahme bilden die Centra aller gewundenen Säulen ein Raumgitter der centrirten Quadratsäule, deren Höhe $\sqrt{2}$ mal so

gross ist als die Seite des Basisquadrats, oder mit anderen Worten: ein regulär oktaëdrisches Raumgitter, d. h. ein solches, in welchem je 6 nächste Centra die Ecken eines regulären Oktaëders bestimmen. Ganz wie vorher findet man jetzt 3 Theilsysteme nach 3 senkrechten Richtungen ($\parallel e, e$ und λ) durcheinandergesteckt, so dass immer 3 gewundene Säulen dasselbe Centrum haben und folglich einen 24-punktner bilden. Das ganze System besteht also aus lauter kongruenten parallelen 24-punktnern, deren Centra ein kubisches flächencentrirtes Raumgitter, d. h. dasjenige des regulären Oktaëders bilden. (Vergl. S. 21 Bravais' Raumgitter 14, sowie § 25, 2.)

4) *Das reguläre Gegenschraubensystem erster Art*[1]) (Taf. V, Fig. 62), $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ $\left[Q \text{ in } a;\ a = \frac{\lambda}{2}\right]$ entspringt aus dem vierzähligen zusammengesetzten Gegenschraubensystem 3) des § 17. Nämlich das Schnittpunktsnetz der Q (Textfig. 36) wird mit dem Schnittpunktsnetz in der Hauptebene deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = a$ macht. Die beiden Hauptaxenarten A und B sind 4-zählige Schraubenaxen entgegengesetzten Drehungssinns, die ihnen parallelen 2-zähligen Axen C sind Drehungsaxen. Weil nun die Queraxen Q zum Theil Drehungsaxen, zum Theil Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ sind, so wird ihre Gesammtheit deckbar mit den C, A, B, sobald $\frac{\lambda}{2} = a$ ist. Denn die 2-zähligen Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$ können gleichzeitig 4-zählige Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}$ sein, so dass sowohl die A als die B in sie hineinfallen können. Führt man nun um eine zu a (oder LL' der Textfig. 36) parallele Querschraubenaxe von dieser Art die Bewegung $Q_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ aus, so wird eine Hauptaxe A in eine zu A und Q senkrechte Lage A' geführt; und 4-zählige Schraubung um die ursprüngliche A führt A' in die Lage A'', senkrecht zu beiden vorigen. Die A' und A'' gehn zwischen den A und B schnittlos hindurch, sie treffen aber die C. Also sind 3 zusammengesetzte Gegenschraubensysteme nach 3 senk-

1) früher von mir übersehn; es fehlt auch bei C. Jordan.

rechten Richtungen (|| a, a und λ) so durcheinander gesteckt, dass 3 einander nächste, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende Hauptaxen A so liegen, wie 3 nicht zusammenhängende, senkrecht zu einander verlaufende Kanten eines Würfels mit der Kantenlänge $\frac{\lambda}{4}$. Durch 3-zählige Drehung $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ um *die* Diagonale eines solchen Würfels, welche jene 3 Kanten nicht schneidet, tauschen sich die 3 Theilsysteme cyklisch aus, so dass diese Drehung auch zur Ableitung des Systems aus dem zu Grunde gelegten System dienen kann.

5) *Das reguläre Gegenschraubensystem zweiter Art* (Taf. V. Fig. 63) $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \left[Q' \text{ in } e;\ e = \frac{\lambda}{2}\right]$ entspringt wie das vorhergehende aus dem vierzähligen zusammengesetzten Gegenschraubensystem. Nämlich das Schnittpunktsnetz der Q' wird mit dem Schnittspunktsnetz der Hauptebene deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = e$ macht. Die Queraxen sind theils Dreh-, theils Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$. Diese letzteren nun können, wenn $\frac{\lambda}{2} = e$ wird, zugleich 4-zählige Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}$ sein, so dass sie mit den Hauptaxen A und B deckbar werden. Führt man nun um eine zu e (oder $L'L''$ der Textfig. 36) parallele Querschraubenaxe von dieser Art die Bewegung $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{4}}$ aus, so wird eine Hauptaxe A in eine zu A und Q' senkrechte Lage A' geführt; und diese gelangt nach A'' durch Ausführung der 4-zähligen Schraubung um die ursprüngliche A. Die A' und A'' treffen die B (und C), gehn aber zwischen den A schnittlos hindurch. Also sind 3 zusammengesetzte Gegenschraubensysteme nach 3 senkrechten Richtungen (|| e, e und λ) so durcheinander gesteckt, dass 3 einander nächste, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende Hauptaxen A so liegen wie 3 nicht zusammenhängende senkrechte Kanten eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{4}$. Durch 3-zählige Drehung $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ um diejenige Diagonale eines solchen Würfels, welche jene 3 Kanten nicht schneidet, tauschen sich die 3

Theilsysteme cyklisch aus. Also kann $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ auch zur Konstruktion des Systems aus dem zu Grunde gelegten Systeme dienen. [Ein Specialfall von diesem System ist das von Wiener angegebene, aus lauter regelmässigen Tetraëdern aufgebaute System. Vergl. später die Specialfälle.]

6) *Das reguläre zweigängige 4-punktschraubensystem* [1]) (Taf. V. Fig. 64) $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$ [Q' in e; $e = \lambda$] entspringt aus dem zweigängigen zusammengesetzten 4-punktschraubensystem 4) des § 17. Das Netz der Q (Textfig. 35) ist zwar mit dem Axenschnittnetz der Hauptebene nicht deckbar, wohl aber das Netz der Q', sobald man $\lambda = e$ macht. Dann bilden die Centra von 8 nächsten gleichflächigen Tetraëdern die Ecken eines Würfels mit Kante λ. Nun sind die Hauptaxen 2-zählige Drehaxen und zugleich 4-zählige Schraubenaxen $\left(A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}\right.$ und $\left.B_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}\right)$ und die ihnen parallelen C sind 2-zählige Drehaxen. Folglich können diese Axen A, B, C mit den Queraxen, die sämmtlich 2-zählige Drehaxen sind, deckbar werden. Führt man nun um eine zu $L'L''$ (also zu e) parallele, 4-zählig gewordene Queraxe die Deckbewegung $Q'_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$ aus, so wird eine Hauptaxe A in eine zu A und Q' senkrechte Lage A' geführt; und diese gelangt nach A'' durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$ um die ursprüngliche A. Die A' und A'' treffen die B (und C), gehn aber mitten zwischen den A schnittlos hindurch. Also sind 3 zweigängige zusammengesetzte 4-punktschraubensysteme nach 3 senkrechten Richtungen (|| e, e und λ) so durcheinander gesteckt, dass 3 nächste, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende Schraubenaxen A wie 3 nicht zusammenhängende senkrechte Kanten eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{2}$ verlaufen. Durch 3-zählige Drehung $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ um diejenige Diagonale eines solchen Würfels die jene 3 Kanten nicht schneidet, tauschen sich die 3 Theilsysteme cyklisch aus; daher kann $R_{\frac{2\pi}{3},0}$ zur Konstruktion

1) früher: Reguläres System der gekreuzten Rhombentetraëder.

des Systems aus dem zu Grunde gelegten Theilsystem dienen. —

Von den 4 Systemen des § 18 (Abth. β der 4-zähligen Systeme mit Hauptaxen nach 2 entgegengesetzten Richtungen) sind es nur 1) und 2), welche auf ein hergehöriges neues System führen. Nämlich Fig. 38 auf pag. 125, welche die Schnittpunktsnetze der Queraxen bei allen 4 Systemen veranschaulicht, lässt unmittelbar erkennen, dass das Netz der Q überhaupt nicht mit dem Axenschnittnetz der Hauptebene deckbar werden kann. Obgleich nun das Netz der Q' mit demjenigen der Hauptebene kongruent wird, sobald man $\lambda = e$ macht, so sind doch weder beim abwechselnden zweigängigen 4-punktschraubensystem 3) des § 18, noch beim abwechselnden Quadratsäulensystem 4) des § 18, die Queraxen selber mit den Hauptaxen deckbar. Denn die Queraxen Q' sind sämmtlich 2-zählige Schraubenaxen, die Hauptaxen aber besitzen in beiden Fällen eine 2-zählige Drehung als Deckbewegung. Dadurch ist die Deckbarkeit ausgeschlossen. — Nur aus dem rechten, resp. linken, abwechselnden 4-punktschraubensystem 1) und 2) des § 18 entspringen hergehörige Systeme, nämlich:

7) und 8) *Das rechte, resp. linke, reguläre 4-punktschraubensystem* [1]) (Taf. V. Fig. 65, 66) $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}$, λ, e, $Q'_{\frac{2\pi}{4}, \pm\frac{\lambda}{4}}$, [$Q'$ mitten zwischen 2 nächsten parallelen e; $e = \lambda$]. Bei dem zu Grunde gelegten System wird das Netz der Q' mit dem Axenschnittnetz der Hauptebene kongruent, wenn man $\lambda = e$ macht. Die zugehörigen Axenschaaren werden dann auch deckbar, denn alle Queraxen sind Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$, und die zur Hauptebene senkrechten Axen sind sämmtlich Schraubenaxen $\left(A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}\right)$, welchen die vorigen gleich werden können, sobald $\lambda = e$ ist. Führt man nun um eine zu e (oder $L'L''$ der Textfig. 38) parallele, jetzt 4-zählig gewordene Queraxe die Deckbewegung $Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ aus, so kommt eine Hauptaxe A in eine zur vorigen Lage und zu Q' senkrechte Lage A'; und diese Axe gelangt nach A'' durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ um die ursprüngliche A. Das System besteht also

1) früher: Reguläres Schraubensystem.

aus 3 (|| e, e und λ) durcheinander gesteckten abwechselnden 4-punktschraubensystemen. Von ihren sämmtlichen Axen schneidet keine die andere, sondern alle laufen in Abständen $\frac{\lambda}{4}$ zwischeneinander hindurch. (Fig. 52, in der die punktirten Linien um $\frac{\lambda}{4}$ unterhalb der Zeichnungsfläche zu denken sind, stellt die Lage der Axen für das *rechte* System dar.) Je nachdem das System ein rechtes oder linkes ist, ist die Lage der Hauptaxen eine verschiedene; zwar verlaufen 3 nächstbenachbarte Hauptaxen immer so, wie 3 nicht zusammenhängende senkrechte Kanten eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{4}$; indess, wenn man den Würfel als Rhomboëder ansieht, und diejenige Diagonale, welche jene 3 Kanten nicht trifft, als seine Rhomboëderhauptaxe nimmt, so können jene 3 Kanten, — im Uhrzeigersinn herum verfolgt — entweder die *3 aufsteigenden*, oder die 3 *absteigenden* Randkanten sein.

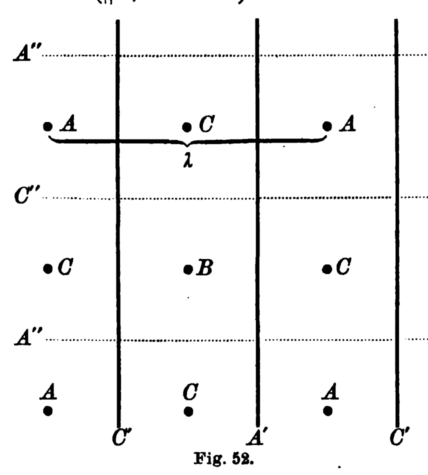


Fig. 52.

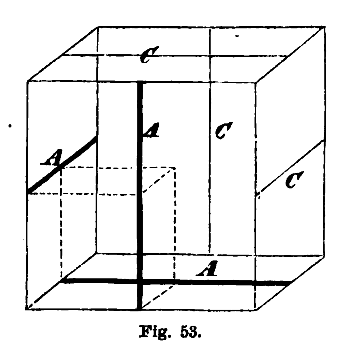


Fig. 53.

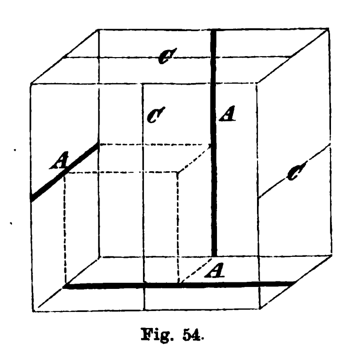


Fig. 54.

Ersteres ist nun der Fall beim *rechten* Schraubensystem, letzteres beim *linken*. Die gegenseitige Lage der Axen A in diesen beiden Fällen zeigen die Figuren 53 und 54, welche

den Würfel mit Kante $\frac{\lambda}{4}$ im Innern eines grösseren Würfels sehn lassen. Für das *rechte* System giebt Fig. 55 die Lage der Hauptaxen (A und B) sämmtlicher Richtungen; die ausgezogenen starken Linien sind die A, die punktirten Linien die B. — Die sämmtlichen Hauptaxen sind von 4-punktschrauben umgeben. Durch 3-zählige Drehung um die vorher als Rhomboëderaxe bezeichnete Diagonale des Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{4}$ tauschen sich die 3 Theilsysteme cyklisch aus; also dient diese Drehung auch zur Ableitung dieses Systems aus dem zu Grunde gelegten.

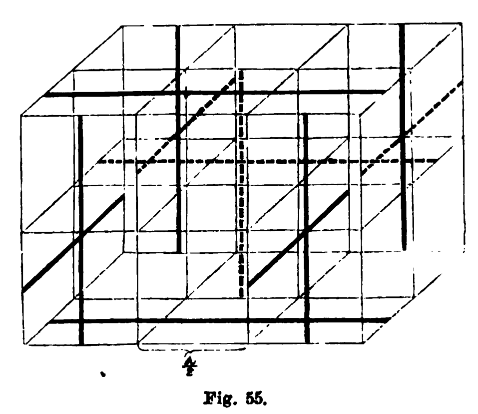


Fig. 55.

Einige Specialfälle: Bei jedem der 3 ersten Systeme kann der 24-punktner in das reguläre Oktaëder, in den Würfel, in die Kombination von Würfel und Oktaëder, in eine Kombination von Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder, übergehn; auch kann er sich auf sein Centrum reduciren, wobei das System eins der 3 regulären Bravaisschen Raumgitter wird. Ferner ist zu bemerken, dass der 24-punktner im Allgemeinen eine von 2 enantiomorphen Gestalten sein muss, ebenso wie der 12-punktner. Die 2 einander zugewandten Quadrate zweier benachbarter 24-punktner des kubischen Systems bilden eine gewundene Säule; daher lässt sich dies System auch aus isolirten gewundenen Säulen aufbauen, analog wie das 12-punktnersystem aus isolirten gleichflächigen Tetraëdern. Wenn alsdann noch jede gewundene Säule sich auf ihren Mittelpunkt reducirt, besteht das ganze System aus Punkten in den Kantenmitten eines kubischen Gitters (Textfig. 50). — Bei den regulären Gegenschraubensystemen bilden 2 gegenüberstehende Punktpaare zweier nächster parallelaxiger zusammengesetzter 4-punkt-

aus 3 (|| [illegible] Kanten eines gleichflächigen Tetraëders. Ist [illegible] regulären Tetraëder, so fallen beim Gegenschraubensystem zweiter Art die Punkte des zweiten und dritten Theilsystems mit den Eckpunkten der ersteren Tetraëder zusammen, und es entsteht das specielle, schon von Wiener (vgl. die historische Einleitung, pag. 25) gefundene System, bei dem lauter reguläre Tetraëder parallelflächig, aber mit gekreuzten Kanten, einander gegenüberstehn. — Es kann bei den Gegenschraubensystemen, sowie beim 2-gängigen regulären 4-punktschraubensystem, das gleichflächige Tetraëder übergehn in einen Punkt, ein Punktpaar, in die 4 Eckpunkte eines Quadrats oder eines Rechtecks oder eines quadratischen oder regulären Tetraëders. Die Specialfälle des regulären 4-punktschraubensystems endlich sind analog denen des bei seiner Ableitung zu Grunde gelegten Systems.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Kubisches 24-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{4},0}$, λ, e, $Q'_{\frac{2\pi}{4},0}$ [Q' in e; $e = \lambda$].

2) Rhombendodekaëdrisches 24-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{4},0}$, λ, σ, $Q_{\frac{2\pi}{4},0}$ $\left[Q \text{ in } a;\ a = \frac{\lambda}{2}\right]$.

3) Oktaëdrisches 24-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{4},0}$, λ, σ, $Q'_{\frac{2\pi}{4},0}$ $\left[Q' \text{ in } e;\ e = \frac{\lambda}{2}\right]$.

4) Reguläres Gegenschraubensystem erster Art. $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{4}}$, λ, σ, $Q_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{4}}$ $\left[Q \text{ in } a;\ a = \frac{\lambda}{2}\right]$.

5) Reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art. $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{4}}$, λ, σ, $Q'_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{4}}$ $\left[Q' \text{ in } e;\ e = \frac{\lambda}{2}\right]$.

6) Reguläres zweigängiges 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$, λ, e, $Q'_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$ [Q' in e; $e = \lambda$].

7) und 8) Rechtes, resp. linkes, reguläres 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}$, λ, e, $Q'_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}$ [Q' mitten zwischen 2 nächsten parallelen e; $e = \lambda$].

Capitel VIII.

Die Gesammtheit der regelmässigen allseitig unendlichen Punktsysteme.

§ 27. Uebersichtstabelle.

Zu dieser Tabelle vergleiche man die Tafeln, auf denen die Systeme in derselben Reihenfolge dargestellt sind.

I. Systeme ohne Axen.

1. Axenloses Raumgitter.

IIA) Systeme mit 2-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung.

2. 2-zähliges Säulensystem.
3. 2-punktschraubensystem.
4. System der klinorhombischen Säule.

IIB) Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Gruppe α).

5. System der rechteckigen Säule.
6. Zusammengesetztes rechteckiges 2-punktschraubensystem.
7. System der Rhombensäule erster Art.
8. Rhombenoktaëdersystem.

Gruppe β).

9. Zusammengesetztes rhombisches 2-punktschraubensystem.
10. System des Oblongoktaëders.
11. Rhombisches Gegenschraubensystem.

Gruppe γ).

12. Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem erster Art.
13. System der Rhombensäule zweiter Art.

Gruppe δ).

14. Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem zweiter Art.

IIIA) Systeme mit 3-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung.

15. Rechtes } 3-punktschraubensystem.
16. Linkes } 3-punktschraubensystem.
17. 3-seitiges Säulensystem.
18. Rhomboëdersystem.

III B) Systeme mit 3-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Gruppe α).

19. Rechtes } zusammengesetztes 3-punktschraubensystem.
20. Linkes }
21. Zusammengesetztes 3-seitiges Säulensystem.
22. Zusammengesetztes Rhomboëdersystem.

Gruppe β).

23. Rechtes } abwechselndes 3-punktschraubensystem.
24. Linkes }
25. Abwechselndes 3-seitiges Säulensystem.

IV A) Systeme mit 4-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung.

26. Rechtes } 4-punktschraubensystem.
27. Linkes }
28. 4-zähliges Gegenschraubensystem.
29. Zweigängiges 4-punktschraubensystem.
30. Quadratsäulensystem.
31. Quadratoktaëdersystem.

IV B) Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Gruppe α).

32. Rechtes } zusammengesetztes 4-punktschraubensystem.
33. Linkes }
34. 4-zähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem.
35. Zweigängiges zusammengesetztes 4-punktschraubensystem.
36. Zusammengesetztes Quadratsäulensystem.
37. Zusammengesetztes Quadratoktaëdersystem.

Gruppe β).

38. Rechtes } abwechselndes 4-punktschraubensystem.
39. Linkes }
40. Abwechselndes zweigängiges 4-punktschraubensystem.
41. Abwechselndes Quadratsäulensystem.

V A) Systeme mit 6-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung.

42. Rechtes } 6-punktschraubensystem.
43. Linkes }

44. Rechtes } zweigängiges 6-punktschraubensystem.
45. Linkes }
46. Dreigängiges 6-punktschraubensystem.
47. Hexagonalsäulensystem.

V B) Systeme mit 6-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

48. Rechtes } zusammengesetztes 6-punktschraubensystem.
49. Linkes }
50. Rechtes } zweigängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem.
51. Linkes }
52. Dreigängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem.
53. Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem.

VI) Systeme mit 3-zähligen Hauptaxen von mehr als 2 Richtungen.

54. Kubisches }
55. Oktaëdrisches } 12-punktnersystem.
56. Rhombendodekaëdrisches }
57. Reguläres zusammengesetztes 2-punktschraubensystem.
58. Reguläres abwechselndes 2-punktschraubensystem.

VII) Systeme mit 4-zähligen Hauptaxen von mehr als 2 Richtungen.

59. Kubisches }
60. Oktaëdrisches } 24-punktnersystem.
61. Rhombendodekaëdrisches }
62. Reguläres Gegenschraubensystem erster Art.
63. " " zweiter "
64. Reguläres zweigängiges 4-punktschraubensystem.
65. Rechtes } reguläres 4-punktschraubensystem.
66. Linkes }

Diese Tabelle scheint mehr Systeme zu enthalten, als in meiner früheren Schrift angegeben sind. In Wahrheit enthält sie nur No. 62 mehr; im Uebrigen ist die Zahl nur dadurch vergrössert, dass die rechten und linken Schraubensysteme jetzt immer unter 2 verschiedenen Nummern stehn.

§ 28. Beziehung der regelmässigen Punktsysteme zu den Raumgittern.

Unter den Deckbewegungen eines jeden allseitig unendlichen regelmässigen Punktsystems finden sich Schiebungen,

und zwar eine (λ) parallel einer Hauptaxe [falls das System überhaupt Axen besitzt], und zwei oder mehr geneigt gegen dieselbe. Von diesen mehreren geneigten Deckschiebungen ist allerdings überall da nur eine einzige ausdrücklich aufgeführt worden, wo sich die Existenz der übrigen in Folge der Axen von selbst ergiebt. Denkt man nun bei der Konstruktion eines Systems zunächst nur diese Deckschiebungen irgend wie oft und in irgend welcher Reihenfolge dem Ausgangspunkte ertheilt, so bilden die von ihm nacheinander erreichten Lagen ein Raumgitter. Fügt man alsdann noch die charakteristischen Deckschraubungen des Systems hinzu, so kommt jenes Raumgitter in neue Lagen; und gleichzeitig ist dann, nach hinreichend oft ausgeführter Schraubung, das ganze System konstruirt. Bei speciellen Annahmen über die Lage des anfänglich gegebenen Punktes gegen die Axen kann jedoch das Raumgitter einfach mit sich selbst zur Deckung kommen. Also hat man den

Satz 52. *Jedes regelmässige allseitig unendliche Punktsystem besteht im Allgemeinen aus mehreren in einander gestellten kongruenten Raumgittern; oder es reducirt sich in speciellen Fällen auf ein einziges Raumgitter. Die Deckschiebungen des Systems sind identisch mit denen des zu Grunde liegenden Raumgitters.*

Wenn man, wie es bei der Beschreibung der Systeme zum Zweck der Veranschaulichung vielfach gethan ist, in Gedanken immer mehrere Punkte zu einer Gruppe zusammenfasst, so findet man die Schwerpunkte dieser Gruppen oft nach einem Raumgitter angeordnet. Die engere Punktgruppe scheint in diesem Falle einer Molekel der Bravaisschen Krystalltheorie zu entsprechen; denn bei Bravais sind die Molekeln nach Raumgittern geordnet und bestehn selbst noch aus Atomen. Daher könnte man meinen, die hier vertretene Auffassung der Krystalle als regelmässiger Punktsysteme sei im Wesentlichen nicht verschieden von der Bravaisschen Theorie. Diese Meinung ist irrig. Denn *erstens* ist bei der neuen Theorie jedes, durch einen Punkt ersetzte, Krystallelement mit den anderen gleichartig, sowohl nach seiner Beschaffenheit als nach seiner Lage gegen alle übrigen Krystallelemente; während dies von den Atomen in einer Bravaisschen Molekel im Allgemeinen keineswegs gilt. Und da jedes Krystallelement der neuen Theorie im Allgemeinen noch aus näheren Bestandtheilen zusammengesetzt zu denken ist, welche entweder unmittelbar die durch die chemische Formel dargestellte Molekel, oder noch einen Komplex von solchen, bilden, so ist dasselbe nur mit der Bravaisschen

Molekel, aber nicht mit den einzelnen Atomen innerhalb derselben, zu vergleichen. *Zweitens* darf nicht vergessen werden, dass jene Zusammenfassung einer bestimmten Zahl von Punkten zu engeren Gruppen *stets* in hohem Grade willkürlich, *oft* aber sogar geradezu unnatürlich ist; dies leuchtet namentlich bei den Schraubensystemen ein, weil hier kein Grund vorliegt, die zur Bildung engerer Gruppen vorzunehmende Zerreissung einer unendlichen n-punktschraube eher an *einer* Stelle als an einer anderen eintreten zu lassen.

§ 29. Modelle.

(Vgl. Taf. V, wo das Modell des rechten zusammengesetzten 6-punktschraubensystems V B, 48 abgebildet ist.)

Um die Anschauung von den regelmässigen unendlichen Punktsystemen zu erleichtern, habe ich einfache Modelle konstruirt, in welchen Wachsperlen von 6—7 mm Durchmesser, mit Siegellack an Stricknadeln befestigt, die Systempunkte vorstellen. Nicht jedes einzelne Punktsystem erfordert ein ganz eigenes Modell; sondern wegen der natürlichen Zusammengehörigkeit der Systeme zu engeren Gruppen ist es meistens möglich, die Systeme einer Gruppe an einem und demselben Hauptmodell zur Darstellung zu bringen; man hat an diesem nur leichte Veränderungen vorzunehmen, um die verschiedenen Systeme der Gruppe hervorzurufen. Nur bei den Abtheilungen VI und VII (Systeme mit gleichen Hauptaxen von mehr als 2 Richtungen) erfordert jedes System sein eigenes Modell. Das axenlose Raumgitter (I, 1) endlich habe ich schon früher durch ein bewegliches Modell dargestellt. (Vgl. Anmerkung auf pag. 20.)

Für die Gesammtheit solcher Systeme, deren Projektion auf eine Hauptebene dieselbe Figur giebt, bedarf es immer nur eines Hauptmodells; also giebt es 13 Hauptmodelle, entsprechend den im Text abgebildeten Projektionsfiguren 22 und 33 auf Seite 82 und 113 (bei 6-zähliger Hauptaxe), 23, 34 und 37 auf Seite 86, 117, 124 (bei 4-zähliger Hauptaxe), 25, 39 und 41 auf Seite 92, 128, 132 (bei 3-zähliger Hauptaxe), 28, 42, 45, 47 und 48 auf Seite 98, 138, 143, 148, 151 (bei 2-zähliger Hauptaxe). Bei jedem Hauptmodell muss nun dafür gesorgt sein, dass sich die Wachsperlen in verschiedene Höhe über die Projektionsebene stellen lassen. Dazu bedarf es einer *Geradführung* für die perlentragenden Stricknadeln, sowie geeigneter *Untersätze* unterhalb der Projektionsfigur, um die Nadeln in der richtigen Höhe stehend zu erhalten. Zur Erreichung des ersteren Zwecks dienen 2 im Abstande von etwa 2 cm befindliche gleichgrosse parallele

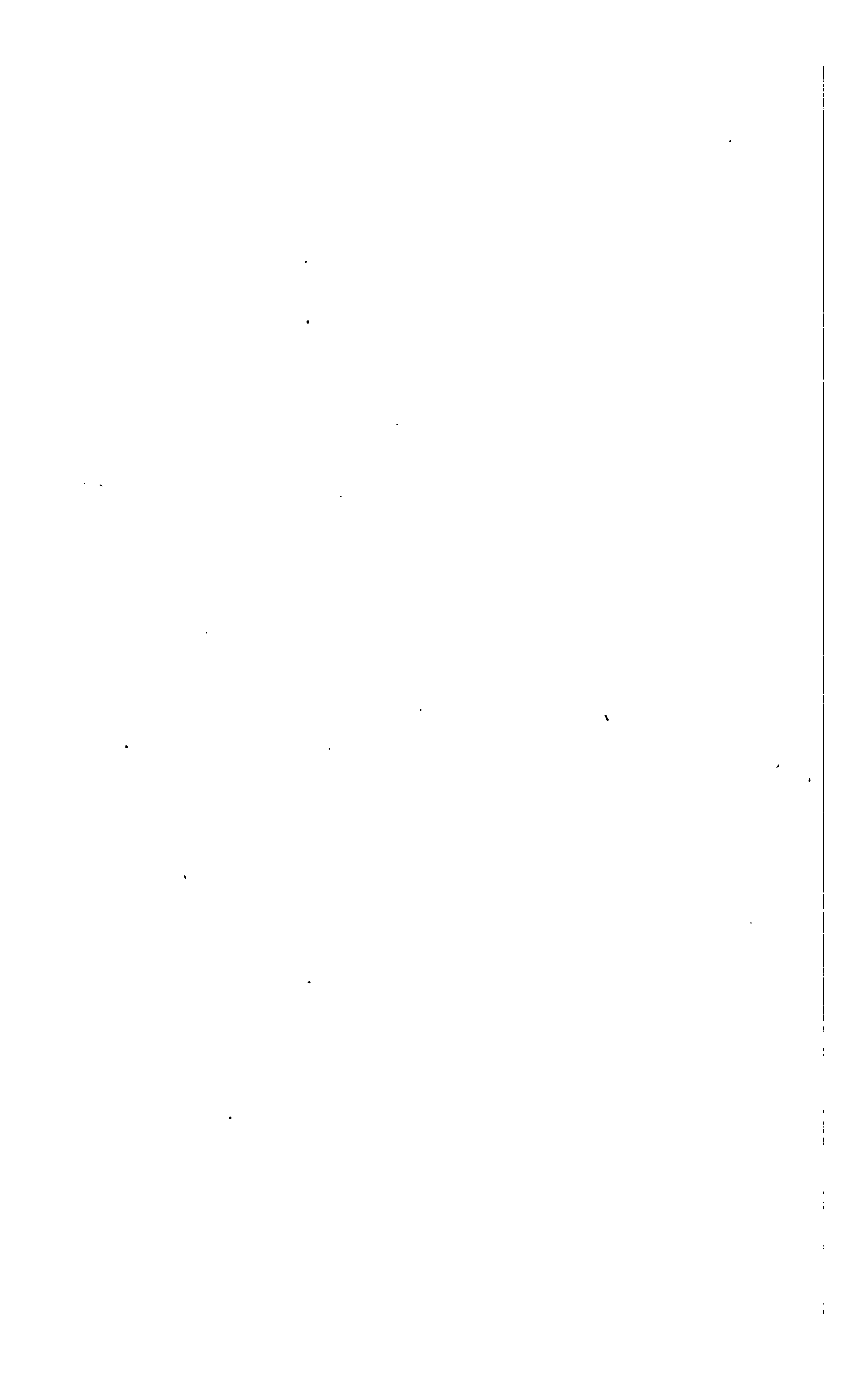
und zwar [illegible] breit), die in kongruenter Weise überhaup[illegible] Weite, um die Nadeln leicht dieselbe [illegible] durchbohrt sind. Die Löcher jedes Brett- [illegible] angeordnet wie die Punkte der betreffenden Projek- [illegible] Beide Brettchen sind vermittelst zweier, an jeder [illegible] zwischen ihnen liegender, Leisten miteinander verbunden. Bei Horizontalstellung der Brettchen liegt je ein Loch des oberen Brettchens senkrecht über einem Loch des unteren; durch jedes solche Lochpaar ist immer eine Nadel gesteckt. Jede Nadel trägt 2 Perlen, deren Abstand gleich der kleinsten zur Hauptaxe parallelen Deckschiebung λ ist. — Das Brettchenpaar mit den sämmtlichen perlenbesetzten Nadeln bildet ein Hauptmodell; es liegt auf 2 Leisten, die innen an 2 Seitenwänden eines vorn und oben offenen Kästchens angebracht sind. — Um nun die Perlen in eine gewisse verlangte Höhe stellen zu können, dient jedesmal *ein Untersatz*, bestehend aus Holzklötzchen, die in passender Grösse und Anordnung auf einem Brett befestigt sind. Um ihn unterstellen zu können, hebt man zunächst — unter Festhaltung des Brettchenpaares — alle Nadeln des Hauptmodells vermittelst eines untergeschobenen glatten Brettchens in die Höhe, setzt darauf den betreffenden Untersatz in das Kästchen ein und zieht das untergeschobene glatte Brettchen weg. Dann fallen die einzelnen Stricknadeln auf die Klötzchen des Untersatzes, und die Perlen stehn in den verlangten Höhen. — Für 2 solche Hauptmodelle, welche in gleicher Anordnung n-ecke, resp. $2n$-ecke tragen (entsprechend Systemen mit n-zähliger Hauptaxe von einer Richtung, resp. mit ineinander fallenden n-zähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen), hat man natürlich nur eine und dieselbe Reihe von Untersätzen nöthig, wenn die Klötzchen breit genug gemacht sind.

Jedes Modell für ein System der Abtheilungen VI und VII besteht aus 3, unter rechten Winkeln zu einer körperlichen Ecke zusammengefügten Brettchen, jedes mit perlentragenden Nadeln besetzt. So sieht man unmittelbar, wie jedes dieser Systeme aus 3, nach den 3 Dimensionen durcheinander gesteckten Theilsystemen besteht. — Für die Systeme, welche aus 12-punktnern, resp. aus 24-punktnern bestehend angesehen werden können, habe ich nur das Modell eines 12-punktners und eines 24-punktners hergestellt.

Die Modelle sind nach meinen Angaben von Herrn Mechaniker A. Heckmann in Karlsruhe verfertigt und befinden sich im physikalischen Kabinet des Karlsruher Polytechnikums.

Abschnitt III.

Prüfung der Theorie an der Erfahrung.



Capitel IX.

Geometrische Eigenschaften der Krystalle.

§ 30. Die Krystallsysteme.

Um die im Vorigen entwickelte Theorie an der Erfahrung zu prüfen, sollen zunächst die geometrischen Eigenschaften der Krystalle mit denjenigen der regelmässigen Punktsysteme verglichen werden. Nun ist bei den Krystallen nur die Lage der Grenzflächen und die durch sie erzeugte Krystallgestalt, aber nicht die Anordnung der Krystallelemente oder die Struktur, der unmittelbaren Beobachtung zugänglich. Dagegen kennt man bei den Punktsystemen zunächst nur die Anordnung der Punkte, und es ist eine erst noch zu lösende Aufgabe (die vermuthlich eine eigene, wohl auf die Molekularkräfte bezügliche, Hypothese erfordern wird): zu ermitteln, welche Grenzflächen auftreten müssen, wenn Molekeln zu einer der, nach dieser Theorie möglichen, Strukturformen zusammentreten. In Folge dessen kann sich die geometrische Vergleichung der Krystalle und der Punktsysteme nur auf die allgemeinen Symmetrieverhältnisse beziehn.

Die Gesammtheit der bekannten Krystalle zerfällt, nach dem Grade der ihnen innewohnenden Symmetrie, in 7 Hauptgruppen oder Krystallsysteme. Für jedes Krystallsystem ist das Vorhandensein gewisser *Symmetrieaxen* (vergl. ihre Erklärung auf pag. 19) charakteristisch, nur *einem* Krystallsystem fehlen sie gänzlich. Neben den charakteristischen Symmetrieaxen können (resp. müssen) in einigen Systemen auch noch andere Symmetrieaxen vorkommen. Damit die Charakterisirung eines Krystalls durch Symmetriaxen möglich sei, muss man ihn völlig regelmässig und unverzerrt ausgebildet, und alsdann die Symmetrieaxen durch seinen

Mittelpunkt gelegt denken. So kennt man erfahrungsmässig folgende Krystallsysteme[1]):

1. Triklines System. Keine Symmetrieaxe (I).
2. Monoklines System. Eine 2-zählige Symmetrieaxe (II A).
3. Rhombisches System. Drei ungleiche aufeinander senkrechte 2-zählige Symmetrieaxen (II B).
4. Rhomboëdrisches System. Eine 3-zählige Symmetrieaxe, begleitet oder nicht von 2-zähligen Queraxen (III B und A).
5. Quadratisches System. Eine 4-zählige Symmetrieaxe, begleitet oder nicht von 2-zähligen Queraxen (IV B und A).
6. Hexagonales System. Eine 6-zählige Symmetrieaxe, begleitet oder nicht von 2-zähligen Queraxen (V B und A).
7. Reguläres System. Vier gleiche 3-zählige Symmetrieaxen, parallel den Diagonalen eines Würfels; daneben entweder drei gleiche 4-zählige, oder drei gleiche 2-zählige Symmetrieaxen, parallel den Kanten desselben Würfels (VII und VI).

In jedem dieser Systeme, mit Ausnahme der beiden ersten, giebt es Krystalle, welche nach den beiden Richtungen derjenigen geraden Linie hin, in welcher eine charakteristische Symmetrieaxe verläuft, geometrisch gleichartig sind, so dass sie durch Drehung um eine gewisse zur Symmetrieaxe senkrechte Gerade um 180°, mit sich selbst zur Deckung gelangen, wobei dann die Symmetrieaxe wieder in die frühere Gerade fällt, aber nach entgegengesetzter Richtung in ihr verläuft. Ein solcher Krystall besitzt also, wie man sich ausdrücken darf, gleiche Symmetrieaxen nach 2 entgegengesetzten Richtungen. Beachtet man dies, so lehrt die Vergleichung der Uebersichtstabelle der Punktsysteme (§ 27) mit den 7 Krystallsystemen, dass jedem der letzteren eine oder zwei von den Hauptabtheilungen regelmässiger Punktsysteme entsprechen, indem sie dieselben charakteristischen Symmetrieaxen besitzen; die Nummern dieser entsprechenden Ab-

---

1) Die hier angewandte Charakterisirung der Krystallsysteme durch Symmetrieaxen ist zwar nicht allgemein üblich, aber sie hat vor anderen Charakterisirungen gewisse Vorzüge. Näheres darüber im folgenden §.

theilungen sind in Klammern hinter die Krystallsysteme gesetzt. Zugleich zeigt sich, *dass alle bei regelmässigen unendlichen Punktsystemen geometrisch möglichen Arten von Symmetrie bei den Krystallen wirklich vorkommen; und ferner, dass dies die einzig vorkommenden Symmetriearten sind.* Dies wird in den folgenden §§ noch eingehender verfolgt werden. *Hiermit sind die Krystallsysteme der Natur, auf Grund der Hypothese von der regelmässigen Anordnung der Krystallelemente, als nothwendige Abtheilungen begriffen.*

Anmerkung. Die gewöhnlichen krystallographischen Axen sind mit den hier benutzten Symmetrieaxen nicht identisch. Während letztere als Axen für Deckbewegungen eingeführt sind, *sind die ersteren solche Coordinatenaxen, auf welche man einen Krystall beziehen muss, damit seine sämmtlichen Flächen möglichst einfache Flächenzeichen mit rationalen Coëfficienten erhalten;* dabei ist unter Flächenzeichen das Verhältniss der durch die Fläche abgeschnittenen Axenstücke (ein jedes als Vielfaches einer für die Axe charakteristischen Grundlänge ausgedrückt) verstanden. Beide Axenarten fallen nur theilweise zusammen. In Systemen mit 3 aufeinander senkrechten Symmetrieaxen (II B, IV B, V B, VI, VII) dienen diese zugleich als Krystallaxen. — Verläuft eine 4-zählige oder 6-zählige Hauptaxe nur nach *einer* Richtung (IV A, V A), so dient sie als eine der Krystallaxen, während als die beiden anderen Axen im ersteren Falle die Quadratseiten des durch die Hauptaxen bestimmten Maschennetzes der Hauptebene, im zweiten Falle die eine Seitenart und die zugehörige Höhe, oder alle drei Seiten der dreieckigen Maschen des Hauptebenennetzes dienen. — Verläuft eine 2-zählige Hauptaxe nur nach einer Richtung (II A), so dient sie als eine Krystallaxe, während für die Wahl der beiden anderen eine gewisse Willkür bleibt, so dass verschiedene Krystallographen hier verschieden verfahren. — Bei Systemen mit 3-zähliger Hauptaxe (III A und B) sind 2 verschiedene Festsetzungen über die krystallographischen Axen getroffen worden. Entweder wird eine Axe in die Hauptaxe gelegt und die 2 anderen Axen so, als wenn die Hauptaxe 6-zählig wäre, indem die hergehörigen Krystalle als Halbflächner von 6-zähligen aufgefasst werden; oder man lässt keine Krystallaxe mit der Hauptaxe zusammenfallen, sondern nimmt 3 schiefwinklige Axen, gelegen wie die 3 Polkanten eines Rhomboëders (Miller). — In axenlosen Systemen (I) ist die Wahl der Krystallaxen noch willkürlicher.

§ 31. Halbflächige und viertelflächige Gestalten.

In den meisten Krystallsystemen giebt es Gestalten, die aus anderen Gestalten derselben Systeme geometrisch dadurch ableitbar sind, dass man von jener anderen Gestalt in regelmässiger Weise gewisse Flächen fortlässt und die übrig

bleibenden bis zum gegenseitigen Schnitt erweitert. Je nachdem die Hälfte oder nur der vierte Theil der gesammten Flächenanzahl der ursprünglichen *vollflächigen* (holoëdrischen) Gestalt beibehalten worden ist, heisst die neue Gestalt *halbflächig* (hemiëdrisch) oder *viertelflächig* (tetartoëdrisch). Diese Gestalten sind nicht als zufällige Unregelmässigkeiten in der Ausbildung der Krystalle, sondern als wesentlich in der Natur der Substanz begründet aufzufassen, denn „in der Natur findet eine strenge Scheidung zwischen den holoëdrischen und hemiëdrischen Formen statt, indem eine und dieselbe Mineralart entweder nur holoëdrisch oder nur hemiëdrisch krystallisirt; dieselbe Scheidung besteht auch für die verschiedenen Modalitäten der Hemiëdrie“ (Naumann-Zirkel: Elemente d. Mineralog. 1877. p. 13). Wenn somit die Halb- und Viertelflächigkeit nicht als eine untergeordnete Erscheinung, sondern als gleichberechtigt mit der Vollflächigkeit zu erachten ist, so ist es nothwendig, bei einer Eintheilung des ganzen Krystallreichs in Krystallsysteme die letzteren so zu definiren, dass sie die Halb- und Viertelflächner wirklich mit umfassen. Diese Forderung ist nicht erfüllt bei der Charakterisirung der Krystallsysteme durch *Symmetrieebenen*, denn diese passt unmittelbar nur auf die Vollflächner, während die Halbflächner, *im Widerspruch mit der allgemeinen Charakteristik der Systeme*, denselben als eine Art Ausnahmeerscheinung angehängt werden müssen. Werden z. B. die Gestalten des regulären Systems dadurch charakterisirt, dass sie 3 aufeinander senkrechte gleiche Symmetrieebenen besitzen, so gehört das Tetraëder nicht zum regulären Krystallsystem, denn es besitzt diese Symmetrieebenen nicht, weder in geometrischer noch physikalischer Beziehung. Dagegen fügen sich bei Charakteristik der Krystallsysteme durch *Symmetrieaxen*, wie sie im vorigen § gegeben ist, die Halb- und Viertelflächner ohne Weiteres in die Krystallsysteme ein, sobald man nur die rhomboëdrischen Gestalten zu einem eigenen System zusammengefasst hat.

Es soll nun die Richtigkeit der im vorigen § ausgesprochenen, aber noch nicht genügend bewiesenen Behauptung, „dass dieselben Symmetriearten, die sich bei den regelmässigen Punktsystemen finden, auch die einzigen bei Krystallen vorkommenden seien“, in diesem § für die halb- und

viertelflächigen Gestalten im Einzelnen nachgewiesen werden. Zu dem Zweck werden jetzt (mit Benutzung von Groths physikalischer Krystallographie) alle bisher beobachteten Arten von Hemiëdrie und Tetartoëdrie auf den Grad ihrer Symmetrie untersucht und der entsprechenden Abtheilung regelmässiger unendlicher Punktsysteme (§ 27) zugewiesen.

1) *Reguläres Krystallsystem.* Beobachtet sind 2 Arten von Hemiëdrie: die *parallelflächige* oder pentagonale, und die *geneigtflächige* oder tetraëdrische. Erstere ist dadurch charakterisirt, dass in dem 48-flächner, als dem allgemeinsten Körper dieses Systems, die abwechselnden Flächenpaare (jedes über einer Pyramidenwürfelfläche liegend gedacht) fortfallen. Dadurch gehn die 4-zähligen Symmetrieaxen, die den Kanten eines Würfels parallel laufen, in 2-zählige über, und die 3-zähligen, parallel den Diagonalen jenes Würfels, werden zu solchen von nur *einer* Richtung, indem es nicht mehr möglich ist, den entstandenen Körper (das Dyakisdodekaëder) so mit sich zur Deckung zu bringen, dass eine 3-zählige Axe in dieselbe gerade Linie wie vorher fällt, aber nach entgegengesetzter Richtung in ihr verläuft. Die bei den Vollflächnern vorhandenen 2-zähligen Axen aber fallen fort. Es ist genau dieselbe Combination von Axen (nämlich 3-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Tetraëders, und 2-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach seinen Kantenmitten), wodurch die Abth. VI der regelmässigen Punktsysteme charakterisirt ist. (Vergl. § 25.)

Die *geneigtflächige Hemiëdrie* besteht darin, dass in den abwechselnden Oktanten alle Flächen fortfallen. Die dadurch entstehenden Formen (Tetraëder und andere) besitzen genau dieselben Symmetrieaxen wie die parallelflächig hemiëdrischen Formen, gehören also zu derselben Abth. VI der Punktsysteme. Nur darin unterscheiden sich beide Arten der Hemiëdrie, dass von den 9 Symmetrieebenen, welche die regulären Vollflächner besitzen, bei den parallelflächig hemiëdrischen Gestalten nur die 3 gleichen aufeinander senkrechten Symmetrieebenen vorhanden sind, bei den geneigtflächig hemiëdrischen dagegen nur die 6 gleichen *anderen* Symmetrieebenen (gehend durch je 2 parallele gegenüberliegende Würfelkanten). In entsprechender Weise giebt es unter den Punktsystemen der Abth. VI solche, welche die eine oder

bleibenden bis zum gegenseit[illegible] besitzen können (ohne
dem die Hälfte oder [illegible] besitzen müssen).
Flächenanzahl der [illegible] Vorkommen beider Arten von
Gestalt beibeha[illegible] Tetartoëdrie, beobachtet. Auch diese
flächig (hemië[illegible] alle dieselben Symmetrieaxen, da-
Gestalten s[illegible] noch [illegible] natürlich beide Arten von Symmetrie-
Ausbildun[illegible] ihnen [illegible] also dieselbe Symmetrie inne, wie den
Natur [illegible] wohnt [illegible] der Abth. VI, welche im Allgemeinen keine
Natur [illegible] zu besitzen brauchen.
sche[illegible] Alle bisher beobachteten halb- und viertel-
sel[illegible] flächigen Gestalten des regulären Krystallsystems haben den-
selben Symmetriecharakter wie die Punktsysteme der Abth. VI.
Geometrisch möglich, aber in der Natur bisher nicht
beobachtet, ist noch die *plagiëdrische oder gyroidische Hemi-
ëdrie*, welche darin besteht, dass von einem 48-flächner alle
abwechselnden Flächen fortfallen. Hierdurch bleiben alle 4-,
3-, und 2-zähligen Axen unverändert; nur sämmtliche Sym-
metrieebenen fallen fort. Diese Gestalten entsprechen also,
gleich den Vollflächnern, genau den Punktsystemen der
Abth. VII; denn für letztere ist die Existenz von Symme-
trieebenen im Allgemeinen nicht nothwendig, wohl aber für
einige von ihnen möglich.

2) *Hexagonales Krystallsystem.* Beobachtet sind 2 Arten von Hemiëdrie und 2 Arten von Tetartoëdrie. Bei der *pyramidalen Hemiëdrie* fallen in der dihexagonalen Pyramide, als der allgemeinsten Gestalt dieses Systems, die abwechselnden Flächen der oberen Pyramide fort, und ebenso die ihnen anstossenden Flächen der unteren; es entsteht eine hexagonale Pyramide dritter Ordnung, d. h. einer Zwischenstellung. Hierbei ist die Hauptaxe 6-zählig geblieben, aber die 2-zähligen Queraxen sind fortgefallen; somit ist genau der Symmetriecharakter der Abth. V A der Punktsysteme entstanden.

Bei der *rhomboëdrischen Hemiëdrie* fallen die abwechselnden je zur oberen oder unteren Pyramide gehörigen Flächenpaare der dihexagonalen Pyramide fort, so dass ein Skalenoëder entsteht. Hierdurch ist die Hauptaxe 3-zählig geworden, und von den 2-zähligen Queraxen sind nur 3 gleiche, unter 120⁰ gegeneinander geneigte (und 3 andere gleiche, die Winkel der vorigen halbirende) übrig geblieben. Es ist dieselbe Symmetrie, welche die Abth. III B der Punktsysteme besitzt.

Diese Krystallabtheilung ist so häufig, dass sie oft (wie auch vorher in § 30) als eigenes Krystallsystem aufgeführt wird.

Bei der *trapezoëdrischen Tetartoëdrie* fallen im Skalenoëder, als dem allgemeinsten Körper der vorigen hemiëdrischen Abtheilung, abwechselnde Flächenpaare fort, ein jedes bestehend aus 2 in einer Randkante zusammenstossenden Flächen. Dadurch bleibt die Hauptaxe 3-zählig, auch die 2-zähligen Queraxen bleiben bestehen. Also entspricht diese Symmetrie noch vollständig der Abth. III B der Punktsysteme. Nur die Symmetrieebenen, welche bei der rhomboëdrischen Hemiëdrie vorhanden sind, fehlen jetzt. Hiermit stimmt es überein, dass einige Systeme der Abth. III B Symmetrieebenen besitzen können, ohne sie jedoch nothwendig besitzen zu müssen.

Bei der *rhomboëdrischen Tetartoëdrie* fallen im Skalenoëder alle abwechselnden Flächen fort, wodurch ein Rhomboëder dritter Ordnung, d. h. einer Zwischenstellung, entsteht. Weil jetzt die Hauptaxe 3-zählig geblieben ist, die 2-zähligen Queraxen aber fortgefallen sind, so besitzen diese Gestalten den Charakter der Punktsysteme der Abth. III A.

Geometrisch möglich, aber in der Natur bisher nicht beobachtet, ist noch eine *trapezoëdrische Hemiëdrie* des hexagonalen Systems. Hier fallen alle abwechselnden Flächen der dihexagonalen Pyramide fort. Dadurch bleibt die Hauptaxe 6-zählig; auch alle 2-zähligen Queraxen bleiben bestehen. Daher gehören diese Gestalten, gleich den Vollflächnern, zu der Punktsystemabtheilung V B; nur besitzen sie, im Gegensatz zu den Vollflächnern, keine Symmetrieebenen, was ja auch bei den entsprechenden Punktsystemen nicht nöthig, bei einigen aber möglich ist.

3) *Tetragonales (quadratisches) Krystallsystem.* Beobachtet sind 3 Arten von Hemiëdrie, die *trapezoëdrische, pyramidale* und *sphenoidische* (oder tetraëdrische). Bei der *ersten* Art fallen in der ditetragonalen Pyramide, als der allgemeinsten Gestalt dieses Systems, alle abwechselnden Flächen fort, wodurch das tetragonale Trapezoëder entsteht. Hierbei ist die Hauptaxe 4-zählig geblieben, auch die 2-zähligen Queraxen sind noch vorhanden; also ist der Symmetriecharakter, gleich dem der Vollflächner, übereinstimmend mit demjenigen der Abth. IV B der Punktsysteme. Der Unterschied von den Vollflächnern besteht nur in dem Fehlen von Symmetrie-

die andere Art von [illegible] der entsprechenden Punktsysteme keine dass sie die [illegible] zu besitzen brauchen, z. Th. aber welche

Ferner [illegible] *pyramidalen Hemiëdrie* fallen in der ditetrago- Gestalten [illegible] die abwechselnden Flächenpaare fort, jedes gegen [illegible] der Pyramide die in einer Randkante zusammenstossenden Flä- eben [illegible] gebildet von 2 [illegible] tetragonale Pyramide (Quadratoktaëder) Pur [illegible] chen, wodurch eine [illegible] d. h. einer Zwischenstellung, entsteht. Dabei S[illegible] dritter Ordnung, ist die Hauptaxe 4-zählig geblieben, aber die Queraxen sind fortgefallen; also ist der Symmetriecharakter gerade derjenige der Abth. IV A der Punktsysteme.

Bei der *sphenoidischen Hemiëdrie* fallen in den abwechselnden Oktanten alle Flächen fort; dadurch entstehn tetragonale Skalenoëder und Sphenoide (Quadrat-Tetraëder). Die vorher 4-zählige Drehaxe wird hierbei 2-zählig, und von den 2-zähligen Queraxen bleiben nur 2 aufeinander senkrechte übrig. Dies ist völlig der Symmetriecharakter der Punktsysteme der Abth. II B, d. h. des rhombischen Krystallsystems. Jedoch ist eine der 3 aufeinander senkrechten 2-zähligen Axen dadurch ausgezeichnet, dass sich 2 aufeinander senkrechte Symmetrieebenen in ihr schneiden, während eine dritte Symmetrieebene nicht vorhanden ist. *Hiermit scheint eine wahre Uebergangsform aus dem quadratischen Krystallsystem in's rhombische vorzuliegen:* Von den 3 senkrechten 2-zähligen Axen ist eine ausgezeichnet, die beiden anderen sind zueinander symmetrisch. Dieser Charakter kommt z. B. dem Punktsystem (No. 5) der rechteckigen Säule zu, wenn man es so specialisirt, dass das Schnittpunktsnetz der Axen von der einen Richtung quadratische Maschen hat, und dass die gleichflächigen Tetraëder (rhombischen Sphenoide), aus denen es aufgebaut gedacht werden kann, die specielle Form tetragonaler Sphenoide (quadratischer Tetraëder) haben. — Andererseits ist es aber auch nicht undenkbar, dass einem solchen Krystall als Strukturform das Punktsystem No. 35, Abth. IV B (oder auch 29, Abth. IV A) zukommt, dessen Hauptaxe eine zweizählige Drehaxe und gleichzeitig eine 4-zählige Schraubenaxe ist, und bei welchem die Mitten von 4 benachbart neben- und übereinander stehenden Punktpaaren die Ecken eines Quadrat-Tetraëders bestimmen.

Geometrisch möglich, aber in der Natur bisher nicht

beobachtet, sind noch *2 Arten von Tetartoëdrieen.* Bei der ersteren werden *trapezoëdrisch-hemiëdrische* Gestalten nochmals *sphenoidisch-hemiëdrisch;* das dadurch entstehende *rhombische* Sphenoid hat 3 aufeinander senkrechte 2-zählige Axen; dies ist der Symmetriecharakter der Abth. II B. — Die zweite Art von Tetartoëdrie entspringt aus dem *Sphenoidischwerden pyramidal hemiëdrischer* Gestalten, wobei ein tetragonales Sphenoid dritter Ordnung (d. h. einer Zwischenstellung) entsteht. Hier existirt nur eine einzige und zwar 2-zählige Axe, entsprechend der Punktsystemabtheilung II A. Auch für diese beiden tetartoëdrischen Formen wäre es übrigens denkbar, dass ihnen als Strukturform No. 35, resp. 29 der Abth. IV B, resp. A, zukommt.

4) *Rhombisches Krystallsystem.* Beobachtet sind 2 Arten von Hemiëdrie, die *sphenoidische* oder tetraëdrische und die (freilich noch zweifelhafte) *monosymmetrische.* Bei der ersteren fallen in den abwechselnden Oktanten die Flächen fort, wodurch rhombische Sphenoide entstehn. Hierbei ist mit den 3 aufeinander senkrechten 2-zähligen Axen keine Veränderung vorgegangen, so dass diese Halbflächner, ebenso wie die Vollflächner, denselben Symmetriecharakter wie die Punktsysteme der Abth. II B besitzen. Der Unterschied der Voll- und Halbflächner besteht nur in der Anwesenheit resp. dem Fehlen von Symmetrieebenen; wirklich giebt es auch unter den Punktsystemen jener Abtheilung zahlreiche, welche Symmetrieebenen besitzen können, obwohl sie dieselben nicht nothwendig besitzen müssen.

Bei der *monosymmetrischen Hemiëdrie* fallen von der Rhombenpyramide, als der allgemeinsten Gestalt des Systems, abwechselnde Flächenpaare fort, so dass eine rhombische Hemipyramide — ein augitartiges Paar — übrig bleibt. Hierbei fallen 2 von den 2-zähligen Axen fort; nur eine 2-zählige Axe bleibt übrig; also bietet die Abth. II A der Punktsysteme die entsprechende Symmetrie dar, d. h. der Krystall gehört in das monokline Krystallsystem.

5) *Monoklines Krystallsystem.* Wenn von den 4 Prismenflächen eine um die andere fortfällt, so hört die 2-zählige Axe zu existiren auf, und der Krystall wird zu den axenlosen Punktsystemen (Abth. I) verwiesen. Dieser Fall scheint

beim Orthoklas realisirt zu sein, dessen Prisma aus 2 physikalisch verschiedenen Halbprismen besteht.

Die hiermit beendete Musterung aller Arten von Halb- und Viertelflächigkeit hat erkennen lassen, dass die sämmtlichen dabei auftretenden Arten von Symmetrie sich auch bei den regelmässigen Punktsystemen vorfinden.

§ 32. Verschiedenheiten innerhalb eines Krystallsystems.

Von der Thatsache der Existenz sehr verschiedenartiger *Krystallreihen*, und überhaupt mannigfach verschiedener Ausbildungsweisen, *innerhalb eines jeden Krystallsystems* giebt die vorstehende Theorie vollständige Rechenschaft. Nämlich *erstens* gehören — abgesehn von den axenlosen Systemen — in jede der Hauptabtheilungen (deren je eine oder zwei einem Krystallsystem entsprechen), mehrere verschiedene Punktsysteme, wie ein Blick auf die Uebersichtstabelle (§ 27) lehrt. Es gehören also verschiedene Strukturformen in ein und dasselbe Krystallsystem; z. B. findet man unter den Systemen, die den Charakter des rhomboëdrischen Krystallsystems an sich tragen, neben der säulenförmigen Struktur auch die rhomboëdrische und die schraubenförmige vertreten, entsprechend wie unter den Krystallen mit 3-zähliger Hauptaxe ausser solchen mit rein rhomboëdrischem Habitus (z. B. Kalkspath) auch solche vorkommen, die einen schraubenförmigen Bau verrathen, z. B. Quarz. Aehnliches findet sich bei den übrigen Krystallsystemen.

Zweitens sind aber auch innerhalb eines jeden der 66 Punktsysteme noch die mannigfaltigsten Modifikationen möglich. Dieselben sind im Allgemeinen durch 2 Umstände bedingt.

a) *Das Verhältniss der charakteristischen Deckschiebungen und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind bei den meisten Systemen noch nicht vollständig bestimmt*, so dass verschiedene Annahmen darüber verschiedene Modifikationen des Systems liefern. Nur bei den Systemen mit Hauptaxen nach mehr als 2 Richtungen sind die Winkel und die Grössenverhältnisse der Deckbewegungen unveränderlich bestimmt. Dagegen ist bei den Systemen mit 3-, 4- und 6-zähligen Hauptaxen von nur ein oder zwei Richtungen das Verhältniss zweier Deckschiebungen, eine parallel, die andre senkrecht zur Hauptaxe, willkürlich wählbar. Bei Systemen mit 2-zähligen

Hauptaxen von mehr als einer Richtung sind 2 Verhältnisse von Deckschiebungen wählbar; bei 2-zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung tritt dazu noch die beliebige Wahl eines Winkels. Bei den axenlosen Systemen endlich sind 2 Deckschiebungsverhältnisse und 3 Winkel unbestimmt. —

b) Nach getroffener Wahl über diese willkürlichen Bestimmungsstücke entspringt eine weitere Mannigfaltigkeit innerhalb jedes einzelnen Punktsystems (mit Ausnahme des axenlosen) daraus, *dass der bei der Konstruktion jedes Systems von Anfang an gegeben gedachte Punkt,* welchen man sämmtliche Deckbewegungen in beliebiger Reihenfolge und irgend wie oft ausführen lässt, *in ganz beliebiger Lage gegen die fest gegebenen Deckbewegungsaxen befindlich sein kann.* Je nach der Wahl über die Lage dieses Punkts können die regelmässigen 2-, 3-, 4- und 6-ecke, welche in den Projektionsfiguren 28, 25, 23, 22 der Systeme mit Hauptaxen von einer einzigen Richtung auftreten, ihre Seiten unter jedem beliebigen Winkel gegen die Seiten des Maschennetzes der Hauptaxenschnitte geneigt zeigen, so jedoch dass alle kongruenten regulären Polygone immer einander parallel stehn. Ferner können die halbregelmässigen 4-, 6-, 8- und 12-ecke, welche in den Projektionsfiguren 42, 45; 39, 41; 34; 33 der Systeme mit gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen auftreten, sich entweder mehr den entsprechenden regelmässigen Vielecken nähern (resp. wirklich in sie übergehn), oder durch Verkleinerung der einen Seitenart mehr den Vielecken von halb so grosser Seitenzahl nahe kommen (resp. ganz in sie übergehn). Besonders bemerkenswerth sind die (bei den einzelnen Abtheilungen schon hervorgehobenen) Specialfälle, wo die Seiten der regelmässigen 2-, 3-, 4- und 6-ecke parallel mit den Seiten, Höhen oder Diagonalen der Maschen des Axenschnittnetzes sind, und ferner jene Fälle, wo sich die halbregelmässigen Vielecke auf ganz regelmässige von halber Seitenzahl reduciren; denn unter diesen Umständen besitzt die Projektionsfigur gewisse Symmetrieebenen, die senkrecht auf ihr stehn; *und diese Symmetrieebenen kommen dann auch einigen der durch jene Projektionsfigur dargestellten Punktsysteme zu.* — Ausser der Neigung der Polygonseiten gegen die Maschenseiten des Axenschnittnetzes hängt von der Wahl der Lage des anfänglichen Konstruktionspunktes

auch noch das Verhältniss der Dimensionen von Polygonen und Netzmaschen ab. Die Polygone können die allerverschiedenste Grösse haben, ja sie können sich auf ihre Mittelpunkte reduciren. — Eine entsprechende Mannigfaltigkeit wie bei den Systemen mit Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen findet sich bei den Systemen mit Hauptaxen von mehr als 2 Richtungen, deren Konstruktion ja aus den ersteren abgeleitet wurde.

Aus dem Vorstehenden leuchtet also ein, dass eine geradezu grenzenlose Menge verschiedener specieller Typen oder Ausbildungsweisen innerhalb der einzelnen Punktsysteme, um so mehr also innerhalb der grösseren den Krystallsystemen entsprechenden Abtheilungen, geometrisch möglich ist, so dass der Reichthum der Natur an verschiedenen Krystallreihen und Typen auf Grund dieser Theorie vollkommen verständlich wird. — Allerdings ist man gänzlich ausser Stande anzugeben, ob die verschiedenen *geometrisch* möglichen regelmässigen Punktsysteme auch *mechanisch* möglich, d. h. ob sie stabile Gleichgewichtslagen für kongruente Molekeln sind.

Einige specielle Typen, die für die Krystallographie und auch für die Physik von besonderem Interesse sind, sollen nun noch eingehender verfolgt werden.

§ 33. Grenzformen.

Mit diesem Namen bezeichnet man bekanntlich solche Krystallgestalten, welche mit den Formen eines anderen Krystallsystems, zu dem sie in Wahrheit nicht gehören, doch eine sehr grosse Aehnlichkeit haben. Diese kann soweit gehn, dass die Entscheidung durch Winkelmessungen schwer oder gar nicht herbeigeführt werden kann, sondern dass die Untersuchung der optischen Eigenschaften oder die Beobachtung der Aetzfiguren den Ausschlag geben muss. Es mag nicht überflüssig sein, einige Beispiele von Grenzformen hier zusammenzustellen:

Quadratische Formen mit dem Habitus des regulären Systems. Leucit, früher für regulär gehalten, ist durch H. v. Raths genaue Winkelmessungen als quadratisch erkannt, und diese Entdeckung ist sowohl von H. Tschermak durch den Nachweis der optischen Einaxigkeit, als von H. Baumhauer da-

durch bestätigt worden, dass er die 8 Flächen des Quadratoktaëders in Aetzmitteln weniger löslich fand als die anderen 16 Flächen. — Beim *Kupferkies* ist die Hauptaxe so wenig kleiner als die Nebenaxen, dass die Krystalle nicht leicht von regulären Tetraëdern unterschieden werden können. — *Jodsaures Ammonium* hat ein Quadratoktaëder, dessen Hauptaxe nur wenig grösser als die Nebenaxen ist, so dass es dem regulären Oktaëder (welches dem chemisch analog konstituirten jodsauren Kalium zukommt) nahe verwandt erscheint.

Rhombische Formen mit dem Habitus des hexagonalen oder des quadratischen Systems. Die Krystallreihe des *Witherit*, dessen Prismenwinkel nicht sehr von 60° abweicht, zeigt grosse Aehnlichkeit mit hexagonalen Gestalten; ebenso die des *Kupferglanzes*. *Kalkuranit*, dessen Prismenwinkel wenig von einem rechten verschieden ist, zeigt in seiner krystallographischen Entwickelung die grösste Aehnlichkeit mit den chemisch analog konstituirten, aber streng quadratischen *Kupferuranit* und *Zeunerit*.

Monokline Formen mit dem Habitus eines Systems von höherer Symmetrie. *Thomsenolith* ist nach H. Nordenskiöld[1]) *klinoquadratisch*, d. h. monoklin mit quadratischem Habitus; ebenso nach H. Klein[2]) das *β-Anisbenzanishydroxylamin*. Letzteres ist, bei einem nur um 5 Minuten von 90° abweichenden Säulenwinkel, dennoch unzweifelhaft optisch 2-axig, und zwar liegen die optischen Axen der verschiedenen Farben in etwas verschiedenen Ebenen und haben verschiedene Axenwinkel; bei allen steht die zweite Mittellinie senkrecht zur Symmetrieebene. *Klinochlor* ist nach H. Schrauf[3]) *klinohexagonal*, d. h. monoklin mit hexagonalem Habitus. *Wolfram* wurde früher für rhombisch gehalten, aber nach seinem krystallographischen und optischen Verhalten ist er nach H. Des Cloizeaux unzweifelhaft monoklin; dasselbe gilt vom *Datolith*.

Trikline Formen mit dem Habitus eines Systems von höherer Symmetrie. Der trikline *Rhodonit* zeigt sich krystallographisch

---

1) Vergl. Schrauf „Ueber Klinochlor u. s. f.“ in Tschermaks Mineral. Mittheil. 1874. p. 161.

2) Krystallogr. Mittheilungen II. in Liebigs Annal. d. Chem. Bd. 186. 1877. p. 93 ff.

3) „Ueber Klinochlor“ loco citato.

sehr ähnlich entwickelt wie der monokline *Augit* und wie die rhombischen *Hypersthen* und *Bronzit;* die Winkelverhältnisse der einzelnen Zonen sind bei diesen verschiedenen Mineralien überraschend ähnlich. — *Orthoklas*, welcher mit triklinen Feldspäthen (Mikroklin, Albit) in Dimensionsverhältnissen, Kombinationen und Zwillingsbildung eine ausserordentliche Aehnlichkeit besitzt, ist in geometrischer Beziehung entschieden monoklin, und doch verweist ihn, wie schon am Ende von § 31 angedeutet, die Verschiedenheit der Spaltbarkeit nach seinen beiden Säulenflächen in das trikline System.

Das Verständniss des eigenthümlichen geometrischen Charakters der Grenzformen bietet für die neue Theorie der Krystallstruktur im Allgemeinen keine Schwierigkeit, denn *fast sämmtliche Grenzformen stellen sich einfach als gewisse Specialfälle der allgemeinen regelmässigen Punktsysteme heraus, ohne dass zu ihrer Erklärung noch besondere Annahmen erforderlich wären.* Zunächst kann das Punktsystem 1) der Abth. I (triklines Krystallsystem) dem Charakter eines jeden anderen Krystallsystems *nahe kommen*, denn es ist ein Raumgitter, und ein solches ist, je nach der Beschaffenheit seines parallelepipedischen Kerns, sehr verschiedener Symmetriegrade fähig (vgl. pag. 20 u. 21). Auf eine specielle Grenzform dieses Systems wird nachher noch zurückgekommen. Was ferner die mit Axen begabten Punktsysteme angeht, *so wähle man die Verhältnisse der charakteristischen Deckschiebungen, welche im Allgemeinen ganz beliebig sind, besonders einfach (z. B. angenähert oder genau gleich 1), oder man gebe — bei Systemen von geringerer Symmetrie — dem Schnittpunktsnetze der Hauptaxen mit einer Hauptebene genau oder angenähert solche Maschen, wie sie Systemen von höherer Symmetrie zukommen, ohne dass man doch den Axen selber diesen höheren Symmetriegrad (höhere Zähligkeiten) ertheilte: alsdann stellt ein solches Punktsystem die Struktur eines Krystalls vor, der einem Krystallsystem von einer gewissen geringeren Symmetrie angehört, aber gleichzeitig Verwandtschaft zu einem Krystallsystem von höherer Symmetrie darbietet.* Dies erhellt aus folgenden Beispielen:

Wird in Punktsystemen mit 2-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung (Abth. II A, monoklines Krystallsystem)

der Maschenwinkel des Schnittpunktsnetzes der Axen (Fig. 28, pag. 98) = 90°, oder wird, bei beliebigem Maschenwinkel, $e' = e''$, so entsteht der Habitus des rhombischen Krystallsystems, obgleich nicht alle für letzteres charakteristischen 2-zähligen Axen vorhanden sind. (Vgl. z. B. die Specialfälle α, β, γ, zu Nr. 3, § 14, pag. 103, Fig. 29, 30, 31.) Daher hat Naumann Recht, wenn er in Bezug auf Wolfram und Datolith sagt, es seien monokline Krystalle, in denen der schiefe Neigungswinkel der Krystallaxen = 90° geworden sei. — Klinohexagonaler, resp. klinoquadratischer Typus kann u. A. entstehen, wenn in derselben Abtheilung II A der Maschenwinkel des Schnittpunktsnetzes der Axen = 60° oder = 90°, und zugleich $e' = e''$ ist. — Wird in Punktsystemen mit 2-zähligen Hauptaxen nach mehr als einer Richtung (Abtheilung II B, rhombisches Krystallsystem) der Maschenwinkel eines rhombischen Axenschnittnetzes nahe oder genau = 60° oder 90°, so entsteht ein hexagonales oder quadratisches Aussehn, trotz des Fehlens einer 6-, resp. 4-zähligen Axe. Quadratischer Habitus entsteht in derselben Abtheilung auch dann, wenn die Maschenseiten eines rechteckigen Schnittpunktsnetzes einander gleich werden. — Wird in Punktsystemen mit 4-zähligen Hauptaxen von ein oder zwei Richtungen (Abtheilung IV A und B, quadratisches Krystallsystem) λ genau oder angenähert $= e$ (oder in gewissen Systemen $= 2e$ oder $= e\sqrt{2}$), so ist — wie bei Ableitung der Systeme der Abth. VIII erhellte — der reguläre Habitus vorhanden, ohne dass man doch das Punktsystem dem regulären Krystallsystem zuzählen dürfte, denn ihm fehlen die für letzteres charakteristischen 3-zähligen Axen. — Wird in Punktsystemen mit rhomboëdrischem Grundgitter (§ 28), (Abth. III A, B, rhomboëdrisches Krystallsystem) die parallelepipedische Grundgittermasche genau oder angenähert zu einem der 3 Rhomboëder, welche bei Raumgittern des regulären Krystallsystems möglich sind, nämlich Würfel, Oktaëder mit 2 angesetzten Tetraëdern, Rhomboëder mit dem Endkantenwinkel 120°, so kann ebenfalls der reguläre Habitus entstehn, ohne dass das Punktsystem wirklich in das reguläre System gehörte, weil ja die 4-zähligen oder die 2-zähligen Axen parallel 3 aufeinander senkrechten Geraden nicht vorhanden sind. — In allen diesen Fällen erklärt

sich der eigenthümliche Charakter der Grenzformen in ganz ungezwungener Weise.

Nur für einen solchen Fall, wie er im Orthoklas vorliegt, dass der geometrisch streng monokline Habitus mit gewissen physikalischen Eigenschaften verknüpft ist, die nur mit dem triklinen System verträglich sind, finden sich keine unmittelbar entsprechenden Specialfälle unter den Punktsystemen. Hier bleibt zur Erklärung nichts anderes übrig als jene Vorstellung anzunehmen, die in der Bravais'schen Theorie der Krystallstruktur zur Erklärung sämmtlicher Grenzformen, sowie sämmtlicher hemiëdrischen, tetartoëdrischen und hemimorphen Gestalten dienen muss. Diese Vorstellung soll jetzt kurz auseinander gesetzt werden. Dazu werden zunächst die zwischen verschiedenen Raumgittern möglichen Uebergänge betrachtet. Es ist vorher schon hervorgehoben, dass ein Raumgitter den Symmetriegrad eines jeden Krystallsystems genau oder angenähert darbieten kann. Macht man nun über die Kanten und Winkel des Kernparallelepipeds eines Raumgitters solche specielle Annahmen, wie sie den oben gemachten *präcisen* Annahmen entsprechen (z. B. die Kanten genau gleich, oder die Winkel genau $= 60^0$ oder 90^0), so bemerkt man, dass dadurch Raumgitter von geringerer Symmetrie sofort in solche von höherer Symmetrie übergehn, also unmittelbar die Struktur eines anderen Krystallsystems darstellen als vorher. Macht man z. B. in einem Raumgitter mit quadratisch-säulenförmigem Kernparallelepiped die Säulenhöhe gleich der Seite des Grundquadrats, so wird das Gitter kubisch, gehört also nur in das reguläre Krystallsystem. Ebenso verwandelt sich das Gitter von rhombisch-säulenförmiger Masche durch Annahme des Rhombenwinkels $= 60^0$ oder $= 90^0$ genau in das Gitter der 6-seitigen resp. der quadratischen Säule, gehört also in aller Strenge dem hexagonalen resp. dem quadratischen Krystallsystem an. Ebenso geht aus einem monoklinen Raumgitter, durch Uebergang des in der Symmetrieebene liegenden Parallelogramms in ein Rechteck, ein solches hervor, welches vollständig und nur in das rhombische Krystallsystem gehört. Lässt man endlich in einem triklinen Raumgitter den Winkel einer Parallelepipedkante gegen die Ebene der beiden anstossenden Kanten gleich 90^0 werden, oder macht man das Kern-

parallelepiped zu einer klinorhombischen Säule, so entsteht ein vollkommen monoklines Raumgitter. *Um in diesen und ähnlichen Fällen die neben scheinbarer höherer Symmetrie in Wahrheit vorhandene geringere Symmetrie zu erklären, muss man sie nach Bravais' Theorie in die Krystallmolekel verlegen und annehmen, dass die Centra von Molekeln geringerer Symmetrie doch nach einem Raumgitter von höherer Symmetrie angeordnet seien.*

Wenn diese Ansicht über die Natur der Grenzformen — bei dem rein geometrischen Charakter der bisherigen Theorien der Krystallstruktur und bei dem Fehlen der wahren mechanischen Theorie — natürlich nicht für ausgeschlossen erklärt werden kann, so hat sie doch im Allgemeinen geringere Wahrscheinlichkeit als die neue Theorie, welche die Grenzformen, mit äusserst geringen Ausnahmen, in derselben Weise wie alle anderen Krystallformen ohne Weiteres mit umfasst. Nur für einzelne seltenere und versteckte Erscheinungen, z. B. solche, wie sie der Orthoklas darbietet, wird man nicht umhin können, auf die Bravais'sche Vorstellung zurückzugreifen.

§ 34. Hemimorphe Gestalten.

Zu den selteneren Erscheinungen gehört auch die Hemimorphie; „sie besteht darin, dass die Hälfte der Flächen einer Form so ausgewählt erscheint, dass von den beiden Seiten einer Symmetrieaxe die eine von denselben Flächen geschnitten wird wie bei der ganzflächigen Gestalt, die andre von keiner einzigen". (Vergl. Groth: Physikalische Krystallographie p. 421.) Der hierdurch geometrisch zu Tage tretende Gegensatz der beiden Hälften der Symmetrieaxe (d. h. der beiden durch diese Axe gegebenen Richtungen) offenbart sich auch physikalisch durch die den hemimorphen Krystallen innewohnende Eigenschaft der *polaren* Pyroelektricität, derzufolge die beiden Enden jener Axe während der Erwärmung des Krystalls *entgegengesetzte elektrische* Pole werden (und während der Abkühlung ebenfalls, jedoch mit Umkehrung der Polarität).

Dass eine Axe nach den beiden durch sie gegebenen Richtungen verschieden sein kann, hat für die vorliegende Theorie der Krystallstruktur nichts auffälliges, denn eine

ganze Reihe von Abtheilungen der Punktsysteme ist gerade dadurch charakterisirt, dass in ihnen gleiche Axen nur nach einer Richtung verlaufen und nicht nach der entgegengesetzten, so dass es nicht möglich ist, das System mit sich zur Deckung zu bringen, während die Axen in entgegengesetztem Sinne wie vorher verlaufen. Bei einem solchen Systeme muss daher die Anordnung der Punkte ein anderes Aussehn bieten, je nachdem das System von der einen oder von der anderen Richtung der betreffenden Axe her besehn wird. *Trotzdem kann aus dieser Verschiedenheit beider Axenhälften allein noch keine allgemein gültige Erklärung für die Hemimorphie geschöpft werden.* Denn erstens findet sich jene Verschiedenheit vielfach auch bei nicht hemimorphen Krystallen; zweitens aber weisen die Hemimorphien im monoklinen und im rhombischen System *sogar mit Nothwendigkeit darauf hin, dass,* nach Bravais' Vorgange, *der Grund der Hemimorphie vielmehr unmittelbar in der Beschaffenheit der Molekel gesucht werden muss.* Um dies zu beweisen, soll jetzt ein Ueberblick über die bisher bekannten Hemimorphien gegeben, und jede einzelne soll derjenigen Punktsystemabtheilung zugeordnet werden, der sie ihrer Symmetrie nach angehört.

1) Monoklines System. Rohrzucker, Quercit, Weinsteinsäure besitzen wie alle Krystalle des monoklinen Systems nur eine 2-zählige Drehaxe von einer einzigen Richtung; ihre Struktur kann also jedenfalls nur durch irgend ein System der Abtheilung II A dargestellt sein. Nun aber besitzen alle Systeme dieser Abtheilung (Nr. 2, 3, 4) eine Symmetrieebene senkrecht zur Richtung der 2-zähligen Axen, während diese Symmetrieebene obigen Krystallen fehlt; bei letzteren zeigen vielmehr beide Axenenden ganz verschiedene Flächen. Hieraus folgt, dass die Krystallelemente nicht als Punkte angesehn werden dürfen, sondern dass ihnen bereits diese Verschiedenheit in den beiden entgegengesetzten Richtungen innewohnen muss. Ihre Centra aber bilden eins der obigen 3 Punktsysteme der Abtheilung II A.

2) *Rhombisches System.* Bei Kieselzinkerz, Struvit, Resorcin, Milchzucker, Chinasäure [1]) kann es senkrecht zu der

---

1) Diese ist nach H. A. Knop (Liebig, Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 119, p. 327) ebenfalls hemimorph.

hemimorphen Axe keine 2-zählige Deckbewegungsaxe geben; denn eine solche würde verlangen, dass wieder Deckung herrsche, wenn die erstere Axe in entgegengesetzter Richtung in sich selbst gelegt ist; und das ist eben nicht der Fall. Also besitzen diese Krystalle nur eine 2-zählige Axe von einer einzigen Richtung, müssen also zunächst der Abtheilung II A der Punktsysteme zugetheilt werden. Nun aber fehlt ihnen, ebenso wie den hemimorphen Krystallen der vorigen Abtheilung, die zur Axe senkrechte Symmetrieebene, welche den Systemen der Abtheilung II A zukommt, so lange man letztere aus Punkten aufgebaut denkt, ohne die eigene Gestalt der Krystallelemente zu beachten. Hieraus folgt wie vorher, dass der Mangel dieser Symmetrieebene in der Beschaffenheit der einzelnen Krystallelemente begründet sein muss. Ferner besitzen die fraglichen Krystalle 2 aufeinander senkrechte, durch die 2-zählige Axe gehende, Symmetrieebenen. Ertheilt man den Punktsystemen der Abth. II A diese 2 Symmetrieebenen, so gehn sie in Systeme der Abth. II B (die dem rhombischen Krystallsystem entspricht) über. Hiernach bleibt für den Bau dieser Krystalle nur folgende Möglichkeit: Die Centra der Krystallelemente bilden ein Punktsystem der Abth. II B (d. h. des rhombischen Krystallsystems); aber die Krystallelemente selber sind in Richtung der einen Axe hemimorph und mit 2 aufeinander senkrechten, durch diese Axe gehenden Symmetrieebenen versehen. Alsdann besitzt der Krystall wirklich nur diese eine 2-zählige Deckbewegungsaxe, während die beiden auf ihr senkrechten 2-zähligen Axen zwar für das System der *Centra* der Krystallelemente Geltung haben, aber nicht für den ganzen, aus Elementen von der angegebenen Beschaffenheit aufgebauten Krystall.

3) *Rhomboëdrisches System.* Turmalin, Antimonsilberblende, überjodsaures Natrium, Tolylphenylketon besitzen eine 3-zählige Axe von nur einer Richtung, gehören also zur Abth. III A.

4) *Quadratisches System.* Jodsuccinimid hat eine 4-zählige Axe von nur einer Richtung, gehört also zur Abth. IV A.

5) *Hexagonales System.* Schwefelkadmium hat eine 6-zählige Axe von nur einer Richtung, gehört also zur Abtheilung V A.

In Betreff der letztgenannten 3 Krystallsysteme lässt

sich nur soviel sagen, dass das Vorhandensein der Axen von einer einzigen Richtung jedenfalls nicht ohne Weiteres als Ursache der Hemimorphie angesehen werden darf; denn durchaus nicht alle Krystalle, welche den Abtheilungen III A, IV A, V A zugehören, sind hemimorph, ebensowenig wie es alle Krystalle der Abth. II A sind. Z. B. ein Krystall, der ein Rhomboëder dritter Ordnung (d. h. einer Zwischenstellung), oder ein ebensolches Quadratoktaëder, oder eine ebensolche hexagonale Pyramide aufweist, besitzt zwar eine Hauptaxe von einer einzigen Richtung (weil es nicht möglich ist, ihn in der Art mit sich zur Deckung zu bringen, dass die Axe nach entgegengesetzter Richtung wie vorher verliefe); trotzdem ist er nicht hemimorph und zeigt sich auch nicht polarpyroelektrisch, wie H. Friedel[1]) am Apatit nachgewiesen hat. — Hiermit ist gezeigt, dass das Auftreten von Hemimorphie mehr erfordert als das blosse Vorhandensein einer Axe mit 2 nicht deckbaren Hälften; und ferner: dass im rhombischen und monoklinen System die Hemimorphie nicht in der Anordnung der Molekelcentra, sondern nur im Bau der Molekel selbst begründet sein kann; letzteres ist somit auch für die Hemimorphien in anderen Krystallsystemen wahrscheinlich.

Anhang. *Ueber den Versuch einer Erweiterung des Begriffs: Hemimorphie.* Weil Hemimorphie stets mit polarer Pyroëlektricität verknüpft gefunden wird, liegt es nahe, in allen Fällen des Auftretens der letzteren auch Hemimorphie vorauszusetzen, wozu dann freilich der Begriff der Hemimorphie erweitert werden muss. Einzelne dahin zielende Schritte sind schon gethan worden; so namentlich von H. Hankel; doch ist das Beobachtungsmaterial noch nicht reich und sicher genug, um jetzt schon ein endgültiges Urtheil über die Ausführbarkeit jener Erweiterung zu gestatten. Eine, nachher zu erwähnende, Beobachtung des H. Friedel scheint sogar dagegen zu sprechen. Immerhin ist aber der Gegenstand interessant genug, um ein etwas näheres Eingehn an dieser Stelle zu rechtfertigen. — Ausser den vorerwähnten Punktsystemabtheilungen mit Axen von nur einer

---

1) Friedel: Sur les propriétés pyro-électriques des cristaux bons conducteurs de l'électricité. In den Ann. d. Chém. et d. Phys. 4 série. T. 17. 1869. p. 91.

Richtung giebt es nur noch 2 Abtheilungen, bei denen gleiche Axen je nur nach einer von 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen: das ist Abth. VI mit 4 gleichen 3-zähligen Axen parallel den Radien nach den Ecken eines Tetraëders (und 4 *anderen* 3-zähligen Axen in den entgegengesetzten Richtungen), und Abth. III B mit 3 gleichen 2-zähligen Queraxen nach 3 unter 120° verschiedenen Richtungen (und 3 *anderen* 2-zähligen in den entgegengesetzten Richtungen). Es ist nun eine sehr bemerkenswerthe Thatsache, dass es wirklich polarpyroëlektrische Substanzen giebt, die nothwendig der einen, resp. der anderen dieser 2 Abtheilungen zugerechnet werden müssen: *Boracit*, zur geneigt-hemiëdrischen Abtheilung des regulären Systems, Abth. VI, gehörig, besitzt 4 pyroëlektrische Axen, jede mit entgegengesetzt elektrischen Polen, es sind die 3-zähligen Axen, die in den Würfeldiagonalen liegen; ebenso verhält sich nach Rose[1]) der *Rhodicit*, welcher ebenfalls regulär tetraëdrisch ist; ein analoges Verhalten zeigt auch das regulär tetraëdrische *Fahlerz*; berührt man nämlich die beiden Flächen einer planparallelen Platte, die ‖ einer Tetraëderfläche aus einem Fahlerzkrystall geschnitten ist, mit den Enden eines Galvanometerdrahtes, so beobachtet man — bei Erwärmung der Platte — einen Strom, dessen Richtung von der Spitze zur Basis des Tetraëders geht.[2]) — *Quarz*, in der trapezoëdrisch-tetartoëdrischen Abtheilung des hexagonalen Systems krystallisirend (Abth. III B), besitzt nach H. Hankels interessanter Entdeckung[3]) 3 polarpyroëlektrische Axen: es sind die 3 Nebenaxen, welche die Mitten der diametral gegenüberliegenden Kanten der Quarzsäule verbinden.

Mit Bezug auf den ersten Fall heisst es in Naumanns Elementen der Mineralogie,[4]) „dass der Boracit gewissermassen hemimorph in der Richtung der trigonalen Zwischenaxen“ sei. In der That wird eine solche Axe am einen Ende von 3 gleichgeneigten Flächen des Tetraëders geschnitten,

---

1) Riess und Rose: Ueb. d. Pyroëlektricität der Mineralien. Pogg. Ann. d. Physik. Bd. 59. p. 353 ff. (1843.)

2) Friedel l. c. pag. 92 u. 93.

3) Hankel: Ueb. d. thermoëlektr. Eigenschaften des Bergkrystalls. 7. Abh. der el. Untersuch. Im 8. Bd. d. Abh. d. math. phys. Classe d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1868. (Auszug in Pogg. Ann. 131. p. 621).

4) Naumann-Zirkel, Elemente der Mineral. 1877. p. 167.

am anderen Ende nur von einer einzigen auf ihr senkrechten Fläche. Und bezüglich des Quarzes erörtert H. Hankel a. a. O. ausführlich, dass derselbe als hemimorph in Richtung der Nebenaxen aufzufassen sei. Letztere zerfallen nämlich wegen des Auftretens der trigonalen Trapezoëder in 2 ungleichwerthige Hälften, indem ein Ende einer Nebenaxe von nur 2 Flächen, das andere Ende von 4 Flächen jenes Trapezoëders geschnitten wird. — Während sich in diesen Fällen die Ungleichwerthigkeit beider Richtungen einer Axe durch die verschiedene Zahl von Flächen derselben Krystallgestalt bethätigt, welche die beiden Enden schneiden, giebt es in denselben beiden Abtheilungen (VI und III B) zahlreiche andere Fälle, wo die beiden Enden der in Rede stehenden Axen zwar auch nicht deckbar sind, jedoch von gleich viel Flächen in analoger Weise geschnitten werden. Dies gilt von der parallelflächig hemiëdrischen Abtheilung des regulären Krystallsystems (Abth. VI) und von der Mehrzahl der Gestalten des rhomboëdrischen Krystallsystems (III B). *In allen solchen Fällen ist auch keine polare Pyroëlektricität nachweisbar gewesen.*[1]) Es bestätigt sich also auch bei diesen Abtheilungen, was schon bei II A, III A, IV A, V A gefunden war, dass die Existenz von Axen, die nur nach einer von 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, allein noch nicht genügt, die Erscheinung der Hemimorphie hervorzurufen. Sucht man nun die gemeinsame geometrische Eigenschaft aller derjenigen Krystalle irgend welcher Krystallsysteme, welche trotz des Vorhandenseins von Axen mit 2 ungleichwerthigen, d. h. nicht deckbaren, Hälften *keine* polare Pyroelektricität zeigen und daher nicht unter den Begriff hemimorpher Krystalle fallen, so findet man, dass diese Krystalle entweder eine Symmetrieebene senkrecht zur fraglichen Axe besitzen, wobei dann die eine Hälfte des Krystalls das Spiegelbild der anderen ist (hierher Krystalle der Abtheilungen II A, III A, IV A, V A, III B), oder dass wenigstens die eine Hälfte durch Drehung um jene Axe in die Lage des Spiegelbildes zur anderen Hälfte gebracht werden kann (hierher die parallelflächig hemiëdrischen regulären Krystalle der Abth. VI). Das Gemeinsame beider Fälle ist folgendes: Wenn man die

1) Vgl. H. Friedels Untersuchung des Schwefelkieses. l. c. p. 84—91.

nicht deckbaren Axenhälften ineinanderlegt, so wird die Krystallgestalt in zwei Lagen geführt, die zu einander *spiegelbildlich gleich* (symmetrisch) sind in Bezug auf eine durch diese Axe gelegte Symmetrieebene. — Alle übrigen Krystalle mit Axen von 2 ungleichwerthigen Hälften sind polar-pyroelektrisch und können daher als hemimorph aufgefasst werden. Hiernach hätte man statt der an der Spitze dieses § stehenden Definition der Hemimorphie nunmehr folgende:

„Ein Krystall ist hemimorph nach einer Symmetrieaxe, wenn die beiden Axenhälften weder deckbar gleich noch spiegelbildlich gleich sind.“

Gegen diese Erweiterung des Begriffs der Hemimorphie würde nichts einzuwenden sein, wenn nicht durch H. Friedel ein Fall von polarer Pyroëlektricität bekannt geworden wäre, wo die entgegengesetzten Pole überhaupt nicht an den Enden einer Symmetrieaxe, sondern an denen einer anderen Linie auftreten. Herr Friedel [1]) fand nämlich den in Tetraëdern des quadratischen Systems krystallisirenden Kupferkies polarelektrisch in der Weise, dass bei Erwärmung ein Strom von einer Seitenfläche des Tetraëders zur gegenüberliegenden Spitze hin fliesst. Eine solche Linie ist aber keine Symmetrieaxe; und überhaupt hat die ganze Krystallgestalt keine derartige Symmetrieaxe, nach welcher man sie hemimorph ausgebildet nennen könnte. Auf Grund dieser Thatsache (wenn sie wirklich zweifellos feststeht), erscheint die obige Erweiterung des Begriffs der Hemimorphie als zwecklos, weil nun polare Pyroëlektricität doch noch bei anderen als hemimorphen Krystallen vorkommt. Die beiden Fälle des Auftretens polarer Pyroëlektricität, nämlich 1) bei hemimorphen, 2) bei geneigtflächig hemiëdrischen Krystallen, lassen sich dann nur dadurch unter einen gemeinschaftlichen geometrischen Gesichtspunkt bringen, dass man erfahrungsgemäss ausspricht: *„Polare Pyroëlektricität findet sich nur bei solchen Krystallgestalten, zu deren Begrenzung Flächen ohne ihre Parallelflächen gehören.“*

§ 35. Isomorphie.

Die Thatsache der Isomorphie gewinnt durch die neue Theorie der Krystallstruktur an Verständlichkeit. *Man versteht*

1) l. c. pag. 93 und 94.

bekanntlich unter isomorphen Körpern solche, welche bei analoger chemischer Konstitution gleiche oder nahezu gleiche Krystallform besitzen und ausserdem fähig sind, nach veränderlichen Verhältnissen zusammenzukrystallisiren, wodurch sogenannte isomorphe Mischungen entstehn. Diese letztere Fähigkeit ist sogar das entscheidende Merkmal der Isomorphie zweier Substanzen.[1]) Während man früher Analogie der chemischen Konstution zweier Substanzen nur bei Gleichheit der Atomzahl in der chemischen Molekel annahm, hat man den Begriff später erweitert und findet die Analogie darin, dass eine Gruppe von Atomen durch eine andere vertreten werden kann, die unabhängig von der Atomzahl einen gleichen chemischen Wirkungswerth besitzt. Bei dieser Annahme stellt sich die Gleichheit der Atomzahl nur als ein specieller, allerdings in der Natur am häufigsten verwirklichter Fall der Analogie der Konstitution heraus.[2]) Zugleich zeigt sich in letzterem Falle das specifische Volumen (d. h. das Verhältniss des specifischen Gewichts zum Aequivalentgewicht) isomorpher Verbindungen als gleich oder annähernd gleich.[3])

Die Fähigkeit des Zusammenkrystallisirens weist deutlich darauf hin, dass das Wesen der Isomorphie nicht sowohl in einer Aehnlichkeit der äusseren Krystallform zu suchen ist, — welche auch bei keineswegs isomorphen Körpern vorhanden sein kann, z. B. im regulären Krystallsystem — als vielmehr in einer Aehnlichkeit der Struktur, sogar mit möglichster Gleichheit der absoluten Dimensionen; auf letzteres weist die häufige Gleichheit der specifischen Volumina hin. Dies berechtigt zur Aufstellung folgenden Satzes:

„Isomorph sind 2 Substanzen, welche in krystallisirtem Zustande kongruente oder doch nahezu kongruente Strukturformen besitzen (wobei unter Strukturformen die obigen 66 Punktsysteme verstanden sind).“

Berücksichtigt man, dass in den dem regulären Krystallsystem entsprechenden Abtheilungen VI und VII nicht weniger als 13 verschiedene Strukturformen möglich sind, und dass jede derselben, wie in § 32 gezeigt ist, wieder äusserst

1) Vergl. Kopp: Theor. Chemie p. 141 ff. Ferner A. Knop: Anorganographie p. 162. (1876.)
2) Siehe Knop a. a. O. p. 163.
3) Siehe Kopp a. a. O. p. 184.

verschiedene Gestaltungen annehmen kann, so wird es durchaus begreiflich, dass keineswegs alle regulär krystallisirenden Substanzen isomorph zu sein brauchen, trotz des geometrisch nahen Zusammenhanges aller Gestalten dieses Krystallsystems. — Dass auch zwischen Substanzen, die in verschiedenen Krystallsystemen krystallisiren, Isomorphie möglich sei, wird durch die in § 33 angestellten Betrachtungen über Grenzformen wenigstens nicht unwahrscheinlich; freilich ist bisher noch in keinem solchen Falle das Zusammenkrystallisiren nach wechselnden Verhältnissen nachgewiesen.[1])

Capitel X.

Physikalische Eigenschaften der Krystalle.

§ 36. Abhängigkeit von der Richtung, Unabhängigkeit vom Ort.[2])

Die Untersuchung der verschiedensten physikalischen Eigenschaften der Krystalle hat zu einem ganz allgemeinen Erfahrungssatze geführt,[3]) welcher lautet:

Wenn man die physikalischen Eigenschaften eines Krystalls längs geraden Linien untersucht, welche parallel mit beliebigen fest im Raume gegebenen Richtungen durch irgend einen Punkt des Krystalls gelegt sind, so findet man diese Eigenschaften nur abhängig von den Richtungen der Geraden, aber unabhängig von ihrem Ausgangspunkt. Derselbe Satz lässt sich auch in folgender anderen Art aussprechen: „Im Krystall giebt es unzählig viele Punkte, um deren jeden das physikalische

1) Vergl. Kopp a. a. O. p. 148.

2) Dieser § stimmt vielfach mit einer jüngst von mir veröffentlichten Abhandlung „Zurückweisung eines Einwurfs gegen die neue Theorie der Krystallstruktur“ (Wiedem. Ann. d. Phys. 1879. Bd. 6, pag. 545—552) überein, in welcher ein Angriff des Herrn Prof. de Lapparent: Note sur les théories relatives à la structure cristalline in den Annales de la Société scientifique de Bruxelles. 1878, abgewiesen wird. Die Formulirung der ersteren Sätze habe ich ziemlich unverändert Herrn de Lapparents Abhandlung entlehnt.

3) Hierbei ist Herrn Hankels Auffassung der pyroëlektrischen Erscheinungen als isolirt stehende und noch nicht endgültig bewiesene Ansicht unberücksichtigt gelassen.

Verhalten parallel mit beliebigen fest im Raume gegebenen Richtungen dasselbe ist wie um jeden anderen. Der Abstand zweier nächsten solchen Punkte ist unmessbar klein.“ Weil aber das physikalische Verhalten wesentlich von der Massenvertheilung im Krystall abhängen muss, so kann auch folgende Fassung des Satzes als Ausdruck reiner Erfahrungsthatsachen gelten:

„Im Krystall giebt es unzählig viele Punkte, um deren jeden die Massenvertheilung parallel mit beliebigen fest im Raume gegebenen Richtungen dieselbe ist wie um jeden anderen.“

Diese Punkte mögen *homologe Orte* heissen. Dieselben sind, wie die vorstehende Ableitung zeigt, zunächst nur *geometrische* Punkte, während die Frage, ob sie mit Massenpunkten besetzt sind oder nicht, noch ganz offen gelassen ist. Durch ein Verfahren, übereinstimmend mit jenem, vermittelst dessen die Punktanordnung der nicht mit Deckbewegungsaxen begabten regelmässigen Punktsysteme abgeleitet wurde (§ 8, pag. 63 u. 64), findet man nun, dass die homologen Orte parallelepipedisch angeordnet sind, d. h. dass sie ein Raumgitter bilden.

Mit dieser, aus der Erfahrung hergeleiteten, Folgerung stimmt nun die vorliegende Theorie vollständig überein; denn jedes der 66 regelmässigen Punktsysteme enthält parallelepipedisch angeordnete homologe Orte, wie schon daraus hervorgeht, dass sich unter den Deckbewegungen eines jeden Systems 3 nicht in eine Ebene fallende Deckschiebungen befinden.

Mit diesem einfachen Nachweise der Uebereinstimmung zwischen der Theorie und dem, aus dem physikalischen Gesammtverhalten abgeleiteten, allgemeinen Erfahrungssatze könnte man sich schon zufrieden geben. Indessen gelingt es sogar, ausgehend von jenem Erfahrungssatze, den Ergebnissen der Theorie noch viel näher zu kommen. Zu dem Zwecke fasse man ein solches parallelepipedisches Netz homologer Orte in's Auge und verschiebe es im festgehaltenen Krystall parallel mit sich unendlich wenig: dann sind sämmtliche jetzt von ihm besetzte Punkte ebenfalls untereinander homolog, d. h. auch um jeden dieser neuen Punkte ist die Anordnung der Materie eine gleichartige. Weil nun die Ver-

schiebung des ursprünglichen Systems unendlich klein, sonst aber ganz beliebig war, so muss es im Krystall unendlich viele kongruente parallele ineinander stehende Netze von je homologen Orten geben; einzelne dieser Netze werden mit Schwerpunkten von Molekeln besetzt sein, andere nicht. Unter allen diesen Netzen giebt es nun gewisse ausgezeichnete. Nämlich alle Krystalle mit Ausnahme derjenigen des triklinen Systems besitzen Symmetrieaxen, um welche gewisse Drehungen oder Schraubungen ausgeführt werden können, die den (unbegrenzt zu denkenden) krystallinischen Molekularkomplex mit sich selbst wieder zur Deckung bringen. Welchen Punkt einer solchen Symmetrieaxe man nun auch in's Auge fassen mag: jedenfalls verlaufen durch alle zu ihm homologen Punkte parallele gleiche Axen. Ein Netz solcher homologen Punkte, durch welche parallele gleiche Symmetrieaxen verlaufen, soll ein *Hauptnetz* heissen. Jetzt kann man 2 verschiedene Annahmen machen, eine specielle und eine allgemeine. Die specielle Annahme macht Bravais, indem er willkürlich voraussetzt, die Schwerpunkte von Molekeln lägen in den Punkten eines Hauptnetzes; die allgemeine Annahme wird in der vorliegenden Theorie gemacht, indem dies nicht für nothwendig erklärt, sondern zunächst an einem, gegen ein Hauptnetz ganz beliebig gewählten, Orte ein Massenpunkt vorhanden gedacht wird. Genau so wie dieser Massenpunkt zu dem nächsten Punkte des Hauptnetzes liegt, muss ein homologer Massenpunkt bei jedem anderen Punkte des Hauptnetzes liegen, sonst wäre ja die Massenvertheilung um die verschiedenen Punkte des Hauptnetzes keine gleiche. *Diese* Massenpunkte für sich sind also parallelepipedisch angeordnet, und die durch sie ersetzt gedachten Molekeln stehn natürlich untereinander parallel. Aber diese Massenpunkte sind im Allgemeinen keineswegs die einzigen im ganzen Krystall. Führt man nämlich die durch eine Symmetrieaxe geforderten Bewegungen aus (z. B. bei einem Krystall des quadratischen Systems etwa wiederholte Drehungen um 90°), so kommen alle Massenpunkte in neue Lagen, und die durch sie repräsentirten Molekeln stehen zu den vorigen natürlich nicht mehr parallel. *Man erkennt, dass der ganze Krystall aus mehreren* (im vorigen Beispiel: 4) *ineinander gestellten Bravais'schen Raumgittern besteht.* Denkt man sich jedoch den

Specialfall realisirt, dass der anfänglich gegebene Massenpunkt gerade in einen Punkt eines Hauptnetzes fällt, so fallen diese mehreren Raumgitter in ein einziges zusammen, und man hat die Bravais'sche Anordnung, welche sonach als ein Specialfall der allgemeinen Theorie erscheint. *Hiermit ist die neue Theorie unmittelbar als die allgemeinste denkbare Folgerung aus der Gesammtheit der physikalischen Thatsachen abgeleitet.*

Aus physikalischen Beobachtungen wird man im Allgemeinen keine Entscheidung zwischen der hier vertretenen allgemeinen Theorie und der speciellen Bravais'schen erwarten dürfen. Denn welche Beobachtungen man auch anstellen mag, so kann man es doch nie erreichen, das physikalische Verhalten gerade nur längs einer mathematischen Geraden, die von einem mathematischen Punkt ausgeht, zu studiren, und daraus zu entscheiden, ob das Verhalten längs paralleler Geraden immer das gleiche sei, von welchem mathematischen Punkte aus man die Linien auch ziehn mag. Vielmehr kann man stets nur eine Krystallpartie von merklicher Breite dem Versuche unterwerfen. Wenn man z. B. zum Zweck der Härteuntersuchung eine Krystallfläche mit einer harten Spitze ritzt, so überstreicht man keineswegs eine mathematische Gerade, sondern einen Streifen, dessen Breite immer noch gross gegen die Molekularabstände ist. Ebenso ist ein den Krystall durchdringender Lichtstrahl nicht eine gerade Linie, sondern ein schmaler Cylinder; und analog ist es in allen Fällen. *Was die Erfahrung lehrt, ist immer nur das resultirende Verhalten sehr vieler, äusserst nahe beisammen liegender paralleler Molekularfäden, welche also jedenfalls nicht von einem mathematischen Punkt ausgehn.* Hält man sich diese unzweifelhafte Thatsache gegenwärtig, so begreift man, dass die Beobachtungen im Allgemeinen keine unmittelbare nähere Auskunft über die Lagerung der Theilchen geben können, ausser dass sie den allgemeinen Symmetriecharakter des Krystalls erkennen lassen. Nichtsdestoweniger giebt es gewisse specielle Eigenschaften, z. B. die Drehung der Polarisationsebene in manchen Krystallen, welche doch mit bemerkenswerther Deutlichkeit auf solche Strukturen hinweisen, wie sie nur in der neuen Theorie vorkommen.

§ 37. Eintheilung der physikalischen Eigenschaften in zwei Gruppen.

Genauere quantitative Vergleichungen der Theorie mit den physikalischen Beobachtungen sind bei der mangelnden Kenntniss der den Krystallelementen innewohnenden Kräfte nicht ausführbar. Wenn trotzdem die verschiedenen physikalischen Eigenschaften hier noch der Reihe nach behandelt werden, so geschieht es einestheils, weil dabei auf einzelne bisher schwer verständliche Erscheinungen einiges Licht fällt (z. B. die pyroëlektrischen Eigenschaften des Bergkrystalls, die Drehung der Polarisationsebene in einigen Krystallen), anderentheils aber in der Absicht, eine Eintheilung aller den Krystallen zukommenden physikalischen Eigenschaften als begründet nachzuweisen, auf welche bisher noch kein besonderes Gewicht gelegt worden zu sein scheint. Letztere Eintheilung gründet sich darauf, dass die Abhängigkeit der physikalischen Eigenschaften von der krystallographischen Richtung durchaus nicht für alle Eigenschaften eine gleich unmittelbare ist; vielmehr lassen sich in dieser Beziehung 2 Gruppen von Eigenschaften unterscheiden. Zum Zweck der Charakterisirung dieser Gruppen sind einige Bemerkungen vorauszuschicken.

Wenn für irgend eine Eigenschaft (z. B. Härte) in zwei Richtungen a und b im Krystall Gleichheit herrscht, so kann letztere wesentlich oder unwesentlich (singulär) sein. *Die Gleichheit ist wesentlich*, wenn in allen unendlich wenig von a verschiedenen Richtungen sich ebensolche Werthe und in ebensolcher Reihenfolge finden, wie in allen unendlich wenig von b verschiedenen Richtungen. Wenn dies nicht der Fall ist, so ist die Gleichheit *unwesentlich oder singulär*. Unter „Gleichheit“ schlechtweg ist im Folgenden immer wesentliche Gleichheit verstanden. — Ferner sollen unter *„übereinstimmenden krystallographischen Richtungen“* solche verstanden werden, durch deren Ineinanderlegung die Krystallgestalt in zwei Lagen geführt wird, die sich entweder decken, oder die zu einander symmetrisch sind in Bezug auf eine durch die Zusammenfallsrichtung gelegte Ebene. Der Begriff der *Uebereinstimmung* umfasst hiernach die beiden Begriffe der *Kongruenz* und der *Symmetrie* (Deckungsgleichheit und spiegel-

bildliche Gleichheit). — Mit Benutzung dieser Ausdrücke wird nun die folgende Eintheilung verständlich.

Die Eigenschaften der ersten Gruppe sind dadurch charakterisirt, dass Gleichheit nur in solchen Richtungen herrscht, die auch krystallographisch übereinstimmen; hierher hauptsächlich alle von der Cohäsion abhängigen Eigenschaften.

Bei den Eigenschaften der zweiten Gruppe ist dagegen die Gleichheit nicht durchgängig auf krystallographisch übereinstimmende Richtungen beschränkt; hierher die optischen, thermischen, magnetischen und einige elektrische Eigenschaften.

Beide Gruppen werden jetzt nacheinander besprochen.

§ 38. Erste Gruppe von Eigenschaften.
a) Von der Cohäsion abhängige.

Am auffälligsten bethätigen sich die Cohäsionsunterschiede in krystallographisch verschiedenen Richtungen durch die *Spaltbarkeit* oder die sogenannten *Blätterdurchgänge.* Es ist kein Fall bekannt, dass sich parallel zu krystallographisch ungleichwerthigen Ebenen Spaltungsflächen mit gleicher Leichtigkeit hervorrufen liessen oder übereinstimmende physische Beschaffenheit zeigten. Dasselbe gilt von den versteckteren Blätterdurchgängen, die Herr Reusch[1]) entdeckt und mit dem Namen „*Gleitbrüche*“ belegt hat. — Auch vermittelst direkter Messung, nämlich durch Untersuchung der *Zugfestigkeit,*[2]) die allerdings erst für eine Substanz (Steinsalz) durchgeführt ist, hat sich ergeben, dass die Cohäsion in krystallographisch verschiedenen Richtungen sehr verschiedene Werthe besitzt.

Ausführlichere Untersuchungen liegen über die *Härte* vor. Seit Huygens,[3]) welcher entdeckte, dass auf der Fläche eines Spaltungsrhomboëders von Kalkspath die kurze Diagonale verschiedene Härte zeigt, je nachdem man sie in der einen oder der anderen Richtung überstreicht, haben beson-

1) Reusch: Pogg. Ann. d. Phys. Bd. 132. p. 441. 1867.
2) Sohncke: Ueber d. Cohäsion des Steinsalzes in krystallographisch verschiedenen Richtungen. Pogg. Ann. 137. p. 177. 1869.
3) Huygens: Traité de la lumière. Leyde. 1690. 4. p. 92—96.

ders Frankenheim,[1]) A. Seebeck,[2]) Franz,[3]) Grailich und Pekárek,[4]) und neuerdings in sehr eingehender Weise Herr F. Exner[5]) Beobachtungen über die Härte von Krystallflächen angestellt. Während Frankenheim die Härte einfach vermittelst Ritzens aus freier Hand unter Anwendung verschiedener Metallnadeln untersuchte, bedienten sich die Späteren einer vollkommneren, zuerst von Seebeck angegebenen Methode, welche es erlaubt, die verschiedenen Härten in Zahlen auszudrücken; sie besteht darin, dass der Druck (in Gewichten) gemessen wird, der auf eine harte Spitze ausgeübt werden muss, damit sie eine unter ihr fortgezogene Krystallplatte in eben noch sichtbarer Weise ritzt. Aber auch diese Methode ist noch keineswegs fein genug, um in allen Fällen sichere Resultate zu liefern. — Das Ergebniss aller dieser Untersuchungen ist, dass die Härte im Allgemeinen verschieden ist nicht nur auf den verschiedenwerthigen Flächen eines Krystalls (sehr auffallend z. B. beim Cyanit), sondern auch in allen krystallographisch nicht übereinstimmenden Richtungen einer und derselben Krystallfläche (z. B. ist auf einer Würfelfläche des Steinsalzes die Härte am grössten parallel der Diagonale, am geringsten parallel der Kante, beim Flussspath ist es gerade umgekehrt). Ja man findet sogar in den beiden Richtungen einer und derselben geraden Linie verschiedene Härte, jedoch nur wenn beide Richtungen krystallographisch nicht übereinstimmende sind (z. B. in jeder Geraden auf einer Oktaëderfläche des Flussspaths oder des Steinsalzes, ausser in jenen, die den Dreiecksseiten der Oktaëderfläche parallel laufen).

Unter der grossen Zahl verschiedener auf ihre Härte untersuchter Krystalle fanden sich bisher nur folgende Fälle,

---

1) Frankenheim: De crystallorum cohaesione. Dissert. inaugur. Vratislav. 1829. Deutsch in Baumgärtner u. Ettingshausen Zeitschr. f. Phys. u. Math. Bd. 9. Wien. 1831.

2) A. Seebeck: Ueb. Härteprüfung an Krystallen. Progr. d. Berliner Realgymnasiums. 1833.

3) R. Franz: Ueb. d. Härte der Mineralien. Pogg. Ann. 80. p. 37. 1850.

4) Grailich u. Pekárek: Das Sklerometer u. s. f. In: Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 13. p. 410. 1854.

5) F. Exner: Untersuchungen üb. d. Härte an Krystallflächen. Gekrönte Preisschrift. Wien. 1873.

wo krystallographisch nicht übereinstimmende Richtungen nicht auch verschiedene Härte erkennen liessen:

Nach Frankenheim: Bleiglanzwürfel, Spaltungsfläche des Glimmers, gerade Endfläche des Kalkspaths.

Nach Franz: Saphyr, Hauptrhomboëder des Quarz.

Nach Exner: Chlorsaures Natron, unterschwefelsaures Blei, Spaltungsfläche der (rhombisch krystallisirenden) schwefelchromsauren Magnesia.

Bezüglich der scheinbaren Härtegleichheit in allen Richtungen der geraden Endflächen des Kalkspaths sagt Frankenheim selbst (Dissertatio): „verum inde non sequitur differentiam esse nullam"; und in der That fanden Grailich und Pekárek mit ihrer feineren Methode das unzweifelhafte Resultat, dass in dieser Fläche (welche, die Rhomboëderecke abstumpfend, die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks besitzt), ein Härtemaximum in der Richtung der Dreieckshöhe von der Spitze nach der Basis hin vorhanden ist, ein Härteminimum in genau entgegengesetzter Richtung, dagegen mittlere Härte parallel zur Dreiecksseite. In gleicher Weise scheint es, mit Rücksicht auf die geringe Feinheit der bisherigen Methoden, durchaus als das natürlichste, bei den angeführten Ausnahmefällen durchgängig die in krystallographisch verschiedenen Richtungen beobachtete Gleichheit der Härte nur für eine *scheinbare* zu halten, d. h. in Wahrheit Härteunterschiede vorhanden zu denken, jedoch so geringe, dass sie der bisherigen Beobachtung noch nicht zugänglich gewesen sind. Dies ist um so wahrscheinlicher, als Frankenheims Beobachtungen nach einer sehr mangelhaften Methode angestellt sind, und als H. Exners Beobachtungen sich auf Substanzen beziehn, die sehr weich und hygroskopisch sind, wodurch die Erkennung feiner Unterschiede ganz besonders erschwert wird. Dagegen kommt mir die von H. Exner (loco cit. p. 107) aufgestellte Hypothese, „dass die Härtekurve[1]) nur abhänge von den Spaltungsebenen des Krystalls und in gar keiner Beziehung zur sonstigen krystallographischen Werthigkeit der Fläche stehe", wenig wahrscheinlich vor; denn Spaltbarkeit

1) Härtekurve ist diejenige in einer Krystallfläche gezeichnet gedachte Kurve, deren Radiivektoren den in den betreffenden Richtungen beobachteten Härtegraden an Länge proportional sind.

und Härte scheinen mir zwei koordinirte Eigenschaften zu sein, die beide von den Cohäsionskräften abhängen; und wenn ein Krystall durch Abwesenheit deutlicher Spaltbarkeit verräth, dass die Unterschiede seiner Cohäsion in verschiedenen Richtungen sehr gering sind, so ist es völlig begreiflich, dass alsdann auch nur sehr geringe Härteunterschiede vorkommen. Uebrigens ist die Exnersche Hypothese auch wohl nicht so schroff gemeint, wie sie klingt, sondern sie dient mehr, um einen mathematischen Ausdruck zur angenäherten Darstellung der Beobachtungen zu gewinnen; denn an einer späteren Stelle (pag. 156) erklärt H. Exner ausdrücklich: „Wenn die Beobachtungen am chlorsauren Natron und unterschwefelsauren Blei keine anderen als kreisförmige Härtekurven ergaben, so folgt daraus nur, dass die Abweichung derselben von einem Kreise zu gering ist, um durch die bisher angewendeten Mittel der Beobachtung noch wahrgenommen zu werden.“ Nach Allem lässt sich als Beobachtungsresultat mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit der Satz aufstellen: *Härtegleichheit findet nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen Statt.*

Neben die bisher besprochenen ist eine scheinbar fremdartige, jedoch ebenfalls auf der Cohäsion der Theilchen beruhende Eigenschaft zu stellen: *der Widerstand gegen die Auflösung*, aus dessen Verschiedenheit nach verschiedenen Richtungen die *Aetzfiguren* hervorgehn. Wenn ein Krystall in ein geeignetes Lösungsmittel gebracht wird, so beginnt die Lösung gleichzeitig an vielen regellos vertheilten Punkten, an welchen eben die (übrigens unbekannten) Bedingungen für die Auflösung am günstigsten sind. Von diesen Punkten aus schreitet die Auflösung nun mit verschiedener Geschwindigkeit fort; man bemerkt nämlich mehr oder weniger regelmässig begrenzte Vertiefungen, deren Dimensionen zunehmen, je länger das Lösungsmittel wirkt; gleichzeitig beginnt die Lösung auch von neuen Centren aus. Wenn das Lösungsmittel hinreichend langsam wirkt, so dass die Theilchen nicht zu tumultuarisch aus ihrem bisherigen Verbande herausgerissen werden, so zeigen sich die Aetzfiguren geradlinig begrenzt; die Geradlinigkeit wird undeutlicher, wenn das Lösungsmittel heftiger wirkt. Zahlreiche über die Aetzfiguren angestellte Untersuchungen, von welchen besonders die grund-

legenden Arbeiten Leydolts[1]) und die reichen Beobachtungen Herrn H. Baumhauers[2]) hervorgehoben seien, lehren übereinstimmend folgende Sätze:

„Auf einer Krystallfläche sind alle Aetzfiguren einander ähnlich und stehn parallel; krystallographisch gleichwerthige Flächen haben übereinstimmende, krystallographisch ungleichwerthige Flächen haben verschiedene Aetzfiguren. Die Symmetrie der als Begrenzung der Aetzfiguren auftretenden Vielecke steht im engsten Zusammenhange mit der Symmetrie der betreffenden Krystallfläche."[3])

Eine andere, von H. F. Exner[4]) angewandte Methode zur Untersuchung der Löslichkeit besteht darin, einen feinen Strahl des Lösungsmittels senkrecht gegen eine Krystallfläche stossen zu lassen; hierdurch wird eine Lösungsfigur erzeugt, die sich im Wesentlichen als eine Aetzfigur von grösseren Dimensionen, aber etwas minder scharfer Begrenzung herausstellt.[5]) Die obigen allgemeinen Sätze über Aetzfiguren werden auch auf diesem Wege bestätigt, so dass als allgemeines Beobachtungsresultat ausgesprochen werden kann: *Gleiche Löslichkeit findet sich nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen.*

Die letzte hergehörige, nämlich ebenfalls von den Cohäsionskräften abhängige, Eigenschaft ist die *Elasticität.* Seitdem zuerst F. Savart[6]) festgestellt hat, dass die Krystalle ein völlig anderes elastisches Verhalten zeigen, als wenn sie Körper mit 3 aufeinander senkrechten Hauptelasticitäten wären (wie man auf Grund ihres optischen Verhaltens bisher vermuthet hatte), ist diese Thatsache wiederholt und

---

1) Leydolt: Ueber eine neue Methode, die Struktur u. Zusammensetzung der Krystalle zu untersuchen (Quarz). In den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. Bd. 15. p. 59. 1855. Ferner: Sitzungsberichte d. Wien. Akad. Bd. 19. p. 10. 1856. (Arragonit.)

2) Pogg. Ann. Bd. 138, 139, 140, 142, 145, 150, 151, 153; Wiedem. Ann. Bd. 1. u. Groths Zeitschr. f. Krystallogr.

3) Man vergl. z. B. die schönen, in vergrössertem Massstabe nach der Natur photographirten Aetzfiguren in A. Knops System der Anorganographie. Zu pag. 27 u. 28. 1876.

4) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 69. Abth. II. p. 1. 1874. Auch in Pogg. Ann. Bd. 153. p. 53.

5) Sohncke: Ueber Aetzfiguren an Steinsalz u. s. f. in Pogg. Ann. Bd. 157. p. 329. 1876.

6) F. Savart: Untersuchung üb. d. Elasticität der (regelmässig) krystallisirten Körper. In Pogg. Ann. Bd. 16. p. 206. 1829.

auf verschiedenen Wegen bestätigt worden. Savarts Methode bestand in der Untersuchung der Klangfiguren, welche sich auf Scheiben hervorrufen lassen, die in verschiedenen Richtungen, aber mit möglichst gleichen Dimensionen, aus ein und demselben Krystall herausgeschnitten sind. Die vorher ausgeführte Untersuchung der Klangfiguren auf Holzscheiben, die einem grossen Stamme, nahe am Rande, entnommen waren, hatte ihn das entsprechende Verhalten eines Körpers kennen gelehrt, der, wenigstens mit grosser Annäherung, als mit 3 aufeinander senkrechten ungleichen Elasticitätsaxen begabt angesehen werden kann. Die Hauptuntersuchung bezog sich auf Bergkrystall, aus welchem 3 Reihenfolgen von Scheiben entnommen wurden: erstlich Scheiben parallel Ebenen, die in verschiedenen Richtungen durch die Hauptaxe gelegt waren, sodann Scheiben parallel Ebenen, die in verschiedenen Richtungen durch eine Pyramidenrandkante gingen, und endlich Scheiben parallel Ebenen, die in verschiedenen Richtungen durch eine solche Gerade gingen, welche in dem Basissechseck 2 weder benachbarte noch diametral gegenüberliegende Ecken verbindet. Die Scheiben der ersten Reihe besitzen unter einander nicht gleiche Eigenschaften (wie es doch bezüglich des Lichts der Fall ist), sondern es zeigen nur je 3 derselben, die unter einander gleiche Winkel bilden, gleiche Elasticität. Bei der zweiten Reihe ist es besonders auffallend, dass die beiden Scheiben, welche der einen und der anderen Pyramidenfläche parallel sind (also auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe liegend gleiche Neigung gegen dieselbe haben), ungleiche Klangfiguren und Töne ergeben. Savart zog aus allen Beobachtungen u. A. folgenden Schluss: „Der Bergkrystall kann nicht zu den Körpern mit 3 ungleichen und rechtwinkligen Elasticitätsaxen gezählt werden, noch viel weniger zu denen, deren Theile rings um eine einzige Linie symmetrisch angeordnet sind; denn es treten hier immer in 3 verschiedenen Richtungen dieselben Erscheinungen auf, und es scheint, als beziehe sich hier Alles auf verschiedene Spaltungsrichtungen, auf die Flächen und die Kanten des Grundrhomboëders.“ Entsprechende Beobachtungen, nur nicht so eingehend und zahlreich, jedoch mit demselben Resultat, stellte er an den ebenfalls rhomboëdrischen Spatheisenstein

und Kalkspath an; auch mit dem Gyps beschäftigte er sich vorübergehend. Die letztere Substanz wurde nach derselben Methode von Herrn A. J. Ångström [1]) untersucht, jedoch konnten nur Platten parallel der Hauptspaltungsebene angewandt werden; auch am Feldspath wurden minder eingehende Beobachtungen gemacht. Das Resultat war, „dass die monoklinoëdrischen Krystalle in akustischer Hinsicht keine rechtwinkligen Elasticitätsaxen besitzen; denn das Dasein eines solchen Axensystems müsste den verschiedenen Arten von Klangfiguren nothwendig eine übereinstimmende Lage geben", während die Beobachtung zeigt, dass die Axen der verschiedenen Arten von Klangfiguren keineswegs zusammenfallen.

Wenn durch diese Untersuchungen schon unzweideutig bewiesen war, dass ein Krystall nach seinen verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität besitzt, so fand dies Resultat eine schöne und noch mehr in die Augen springende Bestätigung durch Untersuchung der Biegung von Stäbchen, die in verschiedenen Richtungen aus einem Krystall geschnitten waren. Herr G. Baumgarten [2]) ermittelte auf diesem Wege die Elasticität des Kalkspaths für 8, um je $22\frac{1}{2}^0$ von einander abweichende Richtungen eines und desselben Hauptschnitts, der durch die Hauptaxe und eine Rhomboëderendkante gelegt ist. In einem solchen Hauptschnitt findet sich keine Symmetrie gegen die Hauptaxe bezüglich der Elasticität, ebensowenig wie hier krystallographische Symmetrie vorhanden ist; denn 2 Stäbchen, deren Längsrichtungen um gleich viel auf der einen und anderen Seite von der Hauptaxe abweichen, zeigen bei gleichen Dimensionen und gleicher Belastung verschiedene Biegung; und zwar haben Stäbchen parallel der Richtung der Rhomboëderendkante das Biegungsminimum, Stäbchen nach der Richtung der kurzen Rhombendiagonale der Rhomboëderfläche das Biegungsmaximum.

Auf demselben Wege wurde von Herrn W. Voigt [3]) das regulär krystallisirende Steinsalz untersucht. Für Stäbchen

1) Ueber die Molekularkonstanten der monoklinoëdrischen Krystalle. In Pogg. Ann. 86. p. 206. 1852.

2) Die Elasticität von Kalkspathstäbchen. In Pogg. Ann. Bd. 152. p. 369. (1874.)

3) Bestimmung der Elasticitätskonstanten des Steinsalzes. In Pogg. Ann. Ergbd. VII. p. 1 u. p. 177. 1876.

von 6 verschiedenen Richtungen, nämlich parallel den Normalen der Würfelfläche, Oktaëderfläche, Granatoëderfläche und dreier Pyramidenwürfelflächen, die resp. unter 11¼°, 22½°, 33¾° gegen die Würfelfläche geneigt sind, wurde die Biegung ermittelt; sie stellte sich am kleinsten parallel der Würfelflächennormale, am grössten parallel der Oktaëderflächennormale heraus. Trägt man daher vom Centrum eines Steinsalzwürfels aus auf den verschiedenen Richtungen im Krystall Längen auf, proportional den Biegungen, welche die Stäbchen jener Richtungen bei gleichen Dimensionen und gleicher Belastung erleiden, so erhält man eine Oberfläche, welche das Ansehn eines über den Krystallaxen konstruirten Würfels mit abgerundeten Kanten und Ecken, und mit vertieften Seitenmitten darbietet. — Eine weitere Untersuchung des H. W. Voigt über die Torsion von Steinsalzstäbchen, die in verschiedenen Richtungen aus einem Würfel geschnitten sind, hat gelehrt, dass die entsprechende, die Torsionsgrössen darstellende Oberfläche einem über den Krystallaxen konstruirten abgerundeten Oktaëder (jedoch ohne Vertiefung der Seitenmitten) ähnelt. Mithin ist die Torsion derjenigen Stäbchen am geringsten, welche die stärkste Biegung erleiden, und umgekehrt.

Beim Gyps hat Herr L. A. Coromilas[1]) für Stäbchen von 17 verschiedenen in der Hauptspaltungsebene liegenden Richtungen die elastische Biegung untersucht und eine unsymmetrische Vertheilung gefunden, so dass die durch Auftragen der Biegungsgrössen in den betreffenden Richtungen erhaltene Kurve durch keine Gerade in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften getheilt werden kann. Die von demselben Beobachter mit Glimmer in verschiedenen Richtungen parallel der Spaltungsfläche angestellte Untersuchung zeigt, dass die entsprechende Kurve einem quadratähnlichen Rhombus mit stark gerundeten Ecken und schwach eingedrückten Seiten gleicht.

Endlich sind noch die für Steinsalz gewonnenen Resultate durch Anwendung zweier anderen Methoden bestätigt worden. Nämlich erstlich untersuchte Herr P. Groth[2]) nach

1) Ueber die Elasticitätsverhältnisse im Gyps u. Glimmer. Inauguraldissert. Tübingen. 1877.

2) Monatsberichte der Berliner Akademie. 1875. p. 544.

einer von Herrn Warburg angegebenen Methode die Schallgeschwindigkeit in Steinsalzstäbchen zweier verschiedenen Richtungen und erlangte dadurch einen Zahlwerth für das Verhältniss der Elasticitätskoëfficienten in diesen beiden Richtungen, welcher mit dem von H. Voigt gefundenen gut übereinstimmt. — Und jüngst hat Herr K. R. Koch[1]) die Biegung von sehr kurzen Steinsalzstäbchen durch die äusserst empfindliche Methode der Verschiebung von Interferenzstreifen gemessen (von welcher Fizeau so erfolgreiche Anwendung zur Bestimmung der thermischen Ausdehnung gemacht hatte), und wiederum die früheren Resultate bestätigt. Weil diese Methode Stäbchen von nur mässiger Länge (15—20mm) voraussetzt, so lässt sie die Anwendung auf eine grössere Reihe von Krystallen zu; daher sind von ihr noch werthvolle Aufschlüsse über das elastische Verhalten der Krystalle zu erhoffen.

Aus allen bisherigen Untersuchungen über Krystallelasticität geht unzweifelhaft hervor, *dass Gleichheit der Elasticität nur in übereinstimmenden Richtungen im Krystall stattfindet.* — Somit ist für sämmtliche von der Cohäsion abhängige Eigenschaften das Beobachtungsresultat dies: dass sie zur ersten der oben aufgestellten beiden Gruppen von Eigenschaften gehören, d. h. dass für sie (wesentliche) Gleichheit nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen herrscht.[2])

Es mag nicht überflüssig sein zu bemerken, dass die Berechtigung der oben eingeführten Unterscheidung von wesentlicher und unwesentlicher (singulärer) Gleichheit einer Eigenschaft in 2 verschiedenen Richtungen jetzt nachträglich besonders einleuchtend wird. In krystallographisch übereinstimmenden Richtungen herrscht nämlich wesentliche

---

1) Ueb. d. Bestimmung des Elasticitätskoëffic. aus der Biegung kurzer Stäbchen. In Wiedemann Ann. d. Phys. Bd. 5. p. 251. 1878.

2) Hiernach erscheint die von Herrn Groth (Monatsber. d. Berl. Akad. 1875, pag. 544 ff.) gegebene Definition eines Krystalls als „eines homogenen festen Körpers, dessen Elasticität sich mit der Richtung ändert," doch als zu eng; denn einerseits ändert sich nicht nur seine Elasticität, sondern die Gesammtheit seiner von der Cohäsion abhängigen Eigenschaften mit der Richtung; und andererseits giebt es noch andere, nicht unter den Begriff des Krystalls fallende, Körper, deren Elasticität sich ebenfalls mit der Richtung ändert, z. B. schnell gekühltes Glas, ferner jeder Körper, der unregelmässig vertheilten Pressungen unterworfen ist, ferner Holz u. s. f.

Gleichheit für alle Cohäsionseigenschaften zugleich, während singuläre Gleichheit bei der einen Cohäsionseigenschaft in diesen, bei der anderen in jenen Richtungen vorkommt.

Betrachtet man das geschilderte mechanische Verhalten der Krystalle im Lichte der vorliegenden Theorie der Krystallstruktur, so muss man freilich zugeben, dass letztere nicht in genauer quantitativer Weise darüber Aufschluss zu geben vermag, weil die Kenntniss des Gesetzes der Molekularkräfte noch fehlt; aber qualitativ ist das besprochene Verhalten auf Grund jener Theorie im Allgemeinen vollkommen begreiflich. *Denn mit wie gearteten Cohäsionskräften man auch die Krystallelemente aufeinander wirkend denken mag: so werden die letzteren — abgesehn von singulären Richtungen — doch nur längs solcher Geraden in übereinstimmender Weise wirken können, um welche herum sie in völlig übereinstimmender Weise angeordnet sind. Es ist folglich nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen gleiches mechanisches Verhalten möglich.*

Will man ausser der allgemeinen qualitativen Uebereinstimmung von Theorie und Beobachtung irgend welche eingehenderen Vergleiche anstellen, so ist man lediglich auf unsichere Vermuthungen und Analogien angewiesen. Trotz dieser grossen Unsicherheit mag wenigstens zwei solchen Betrachtungen hier noch eine Stelle gegönnt sein; zunächst einer Bemerkung über die *Spaltbarkeit*.

Bei einem Krystall, dessen Struktur ein *Raumgitter* ist, hat es — von rein geometrischem Gesichtspunkte aus — eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass er merkliche Spaltbarkeit parallel jenen 3 Ebenen besitzt, welche das Elementarparallelepiped begrenzen; so heisst dasjenige Parallelepiped, welches die 3 kürzesten Punktabstände zu Kanten hat. (Dieser Gedanke ist von Bravais in seinen Études cristallographiques ausführlicher entwickelt; und es hat ja Delafosse auf die Existenz von 3 Blätterdurchgängen seinen Beweis für die Raumgitterstruktur der Krystalle überhaupt gegründet, so dass sein Beweis für diejenigen Krystalle seine Kraft verliert, bei denen Blätterdurchgänge nicht nachweisbar sind.) Weil nun nach der von mir vertretenen Theorie jedem triklinen Krystall Raumgitterstruktur zukommt, so ist für jeden solchen Krystall das Vorhandensein von mehreren deutlichen Blätterdurchgängen vorauszusetzen, während sich für die

übrigen Krystallsysteme auf Grund der Theorie keine solche allgemeine Behauptung aufstellen lässt. In wie weit dieser Schluss durch die Erfahrung bestätigt wird, lehrt folgende Zusammenstellung der Spaltbarkeiten der bekannteren triklinen Krystalle.

Axinit. 4 Spaltbarkeiten, darunter 2 deutliche und 2 unvollkommene.

Albit. 4 Sp.

Mikroklin. 4 Sp.

Kryolith. 4 Sp.

Cyanit. 3 Sp., darunter eine sehr vollkommene und eine wenig vollkommene.

Amblygonit (incl. Montebrasit, Hebronit). 3 Sp., darunter 2 recht vollkommene.

Doppeltchromsaures Kalium. 3 deutliche Sp.; ebenso doppeltchromsaures Silber.

Danburit. 3 Sp., darunter 2 sehr deutliche.

Anorthit. 2 Sp., beide vollkommen.

Rhodonit (incl. Bustamit und Fowlerit). 2 Sp., beide vollkommen.

Babingtonit. 2 Sp., darunter eine sehr vollkommene.

Kupfervitriol. 2 Sp., beide wenig vollkommen; ebenso selensaures Kupfer.

Sassolin. 1 sehr vollkommene Sp. S. gehört aber vielleicht in's monokline System.

Vestan hat sicher Spaltbarkeit, gehört aber vielleicht gar nicht in dies System, sondern zum Quarz.

Von den künstlichen triklinen Salzen ist die Spaltbarkeit meist nicht untersucht.

Wie man bemerkt, sind bei allen sicher in's trikline System gehörigen Krystallen mindestens 2 Spaltbarkeiten nachgewiesen; eine Substanz ohne bemerkbare Spaltbarkeit, wie es deren einige in anderen Systemen giebt, kommt in diesem System nicht vor. Somit findet sich die von vornherein aufgestellte Vermuthung bestätigt.

Eine fernere Bemerkung betrifft die *Löslichkeit.* Die in einer Ebene möglichen unendlichen regelmässigen Punktsysteme[1]) lassen häufig eine, natürlich rein geometrisch zu

1) Sohncke: Die regelm. ebenen Punktsyst. v. unbegrenzter Ausdehn. In Borchardts Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 77. p. 47 ff. 1873.

verstehende, Zusammenfassung gewisser Punkte zu engeren Gruppen zu. Die hierbei auftretenden Vielecke enthalten nun unter sich alle diejenigen Formen, welche als Umrisse von *Aetzfiguren* beobachtet werden. Weil nun die Aetzfiguren jedenfalls in einem sehr nahen Zusammenhange mit der Struktur stehn, — man kann freilich nicht genauer angeben, in welchem, — so ist diese Uebereinstimmung der Aetzfiguren mit den regelmässigen ebenen Punktsystemen jedenfalls bemerkenswerth, wenn sich auch vorläufig keine weiteren Schlüsse daraus ziehn lassen.

§ 39. Erste Gruppe von Eigenschaften, Fortsetzung. b) Pyroëlektricität.

Ausser den von der Cohäsion abhängenden Eigenschaften ist es noch die Pyroëlektricität, welche, wie es scheint, ebenfalls der ersten Gruppe zugerechnet werden muss. Doch gestatten die vorliegenden Beobachtungen allerdings noch keine endgiltige Entscheidung darüber, obwohl unsere Kenntniss von der Pyroëlektricit in den letzten Jahrzehnten besonders durch Herrn W. G. Hankels [1]) unermüdliche und erfolgreiche Thätigkeit wesentlich erweitert worden ist. Aber die Beobachtungen sind zum grössten Theil an natürlich gegebenen Krystallen angestellt, deren unregelmässige Ausbildung die Resultate nothwendiger Weise stark beeinflusst, so dass die von H. Hankel mitgetheilten Zahlen schon aus diesem Grunde nicht als streng untereinander vergleichbare Messungen anzusehn sind. Das Beobachtungsverfahren besteht darin, den ganzen Krystall, bis auf den kleinen Oberflächentheil, dessen pyroëlektrische Spannung während der Abkühlung gemessen werden soll, in Eisenfeilicht oder Platinsand einzubetten und letzteren mit der Erde leitend zu verbinden, darauf das Ganze zu erwärmen, und schliesslich während der Abkühlung

1) Hankel: Elektrische Untersuchungen. In den Abh. d. math.-phys. Classe der Kön. Sächsischen Ges. d. Wiss. Bd. 4 (der gesammten Abh. Bd. 6). 1859. p. 149 Boracit; Bd. 8 (13). 1868. p. 321 Bergkrystall; Bd. 9 (14). 1871. p. 357 Topas; Bd. 10 (15). 1874. p. 271 Schwerspath; p. 343 Arragonit, nebst *einer Uebersicht üb. d. Entwickelung der Lehre v. d. Thermoëlektricität der Krystalle;* Bd. 11 (18). 1878. p. 201 Kalkspath, Beryll, Idokras, Apophyllit; p. 477 Gyps, Diopsid, Orthoklas, Albit, Periklin. Ferner verschiedene Abhh. in Pogg. u. Wiedem. Annal.

dem freien Oberflächentheil das Ende eines zum Elektrometer führenden Drahtes bis auf sehr geringe Entfernung zu nähern. Die verschiedenen Beobachtungen beziehen sich nun nicht auf genau gleiche Temperaturen; namentlich aber ist trotz der Einbettung in das leitende Medium die Einwirkung des übrigen, durch und durch elektrisch erregten, Krystalls auf die angenäherte Spitze sicher noch nicht vollständig ausgeschlossen. Endgiltige Resultate sind wohl erst zu erwarten, wenn der Einfluss der Gestalt dadurch ausgeschlossen wird, dass man aus dem Krystall Kugeln herstellt, und diese auf ihr pyroëlektrisches Verhalten untersucht.[1]) Die Gesammtheit der bisherigen pyroëlektrischen Untersuchungen scheint mir zu folgenden Schlüssen zu berechtigen:

Krystallographisch übereinstimmende Richtungen zeigen gleiches pyroëlektrisches Verhalten. Wo z. B. die beiden Hälften einer Symmetrieaxe krystallographisch übereinstimmen, wie es bei der Hauptaxe des rhomboëdrischen Kalkspaths und bei jeder Nebenaxe, ferner bei allen Axen des quadratischen Idokras, des rhombischen Topas, Schwerspath, Arragonit der Fall ist, da zeigen sie auch gleichnamige Elektricität. Ferner verhalten sich die symmetrischen Hälften des monoklinen Gyps pyroëlektrisch gleichartig. Auch die 4 gleichwerthigen, trigonalen Axen eines Boracitwürfels zeigen untereinander übereinstimmendes pyroëlektrisches Verhalten, während die beiden Hälften einer jeden entgegengesetzt elektrisch sind.

Krystallographisch nicht übereinstimmende Richtungen zeigen

---

1) Herr Hankel zieht aus seinen Beobachtungen an ringsum ausgebildeten und an zerbrochenen Krystallen den Schluss, „dass dieselben uns zwingen, unsere bisherige Ansicht über das Wesen des Krystalls überhaupt zu modificiren", weil „die thermoëlektrischen Vorgänge auf ringsum ausgebildeten Krystallen andere sind als auf blossen Bruchstücken", und weil sich „im elektrischen Verhalten der einzelnen Bruchstücke Verschiedenheiten finden, welche von der speciellen Lage derselben im ganzen Krystall abhängen". Daher sei „der Krystall als ein in sich abgeschlossenes Individuum zu betrachten, bei welchem die einzelnen Theile nicht dem Ganzen und einander gleichen, selbst wenn die äussere Form des Ganzen und der Theile einander vollkommen ähnlich ist". (Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874. Bd. 10 (15). pag. 337.) Diese neue Ansicht wird so lange unannehmbar sein, bis ihre Richtigkeit durch Beobachtung an kugelförmigen Stücken, die an verschiedenen Stellen aus ein und demselben Krystall entnommen sind, unwiderleglich bewiesen sein wird.

ungleiches pyroëlektrisches Verhalten. Hierfür sprechen folgende Beobachtungen: Bei einem hemimorphen Krystall zeigen die Enden der Axe der Hemimorphie entgegengesetzte elektrische Polarität; ebenso verhält es sich mit jeder trigonalen Axe des Boracitwürfels und mit jeder Nebenaxe des Quarz; bei diesen sämmtlichen Axen sind jedesmal die beiden Hälften krystallographisch nicht übereinstimmend (vgl. § 34, pag. 205). Bei Krystallen mit einer Hauptaxe haben die Enden dieser Axe andere Elektricität als die Enden der Nebenaxen, z. B. bei Kalkspath, Beryll, Idokras. Bei Krystallen des rhombischen Systems haben die Enden einer Axe andere Elektricität als die Enden der beiden anderen (und die letzteren beiden unterscheiden sich vielleicht durch die Intensität der elektrischen Erregung?). Dass auch in anderen nicht übereinstimmenden Richtungen als denen der Axen Verschiedenheiten der pyroëlektrischen Spannung vorhanden sind, geht aus mancherlei Beobachtungen hervor. So sind verschiedene Stellen einer Würfelfläche des Boracit verschieden stark elektrisch und z. Th. sogar von verschiedenem Vorzeichen. Bei einem gewissen Typus von Schwerspathkrystallen findet man, wenn man dem Umfange eines durch 2 Axen gelegt gedachten Schnittes folgt, „einen 8-fachen Wechsel der Elektricität: während die Kanten an den Enden der Brachy- und ebenso der Makrodiagonale negativ sind, zeigen die zwischen ihnen liegenden Flächen ∞P positive Spannung".[1] Auch beim Gyps ist die Erregung verschieden stark nach den verschiedenen Richtungen hin.

Aus Allem scheint hervorzugehn, dass die Pyroëlektricität wirklich der ersten Gruppe von Eigenschaften zugezählt werden muss. Ueber den ursächlichen Zusammenhang dieser Erscheinung und der Struktur lässt sich nun freilich gar nichts aussagen. Dass indessen ein naher Zusammenhang bestehn muss: das geht aus der wunderbaren Entdeckung hervor, welche H. Hankel am Bergkrystall gemacht hat. Dass jede der 3 Nebenaxen des letzteren an ihren Enden entgegengesetzte elektrische Pole aufweist, wurde schon erwähnt; „dabei fallen die positiven Pole dieser Axen in diejenigen

1) Hankel: Ueb. d. thermoëlektrischen Eigenschaften des Schwerspaths. Abh. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 10 (15). 1874. p. 285.

Seitenkanten des Prismas, welche an ihrem oberen und unteren Ende die Flächen der trigonalen Pyramide tragen, die negativen Pole dagegen in die zwischenliegenden Kanten. Es ziehen sich nun die positiven Zonen von einer oberen Fläche des Gegenrhomboëders über die ihnen zugehörige Seitenkante, in welcher die positiven Pole liegen, nach der nächsten unteren Fläche des Gegenrhomboëders herab, während sich die negativen Zonen von einer oberen Fläche des Hauptrhomboëders über die zu ihnen gehörige Seitenkante, in welcher die negativen Pole liegen, nach der nächsten unteren Fläche des Hauptrhomboëders herab erstrecken. *Die 6 elektrischen Zonen haben also eine schiefe Lage, und diese ist je nach Art des Krystalls verschieden; bei den sogenannten rechten Bergkrystallen gehen diese Zonen von rechts oben nach links unten, bei den linken Krystallen von links oben nach rechts unten.* ..... Auch wenn die Krystalle nicht ringsum ausgebildet, sondern mit dem unteren Ende angewachsen und zu längeren Prismen ausgebildet sind, ist die zuvor angegebene schiefe Lage der elektrischen Zonen auf den Prismenflächen noch deutlich wahrzunehmen. — Störungen im regelmässigen Verlaufe der Zonen treten ein durch theilweise mangelhafte Ausbildungen und durch Zusammenwachsen rechter und linker Individuen zu einem einfach erscheinenden Krystall.“[1])

Diese Beobachtung scheint von hoher Bedeutung zu sein. Indem nämlich die bei den optisch rechts resp. links drehenden Krystallen verschieden liegenden Rhombenflächen und Trapezflächen viel zu klein sind, als dass die entgegengesetzt schiefe Lage der elektrischen Zonen durch die Verschiedenheit der Oberfläche der Krystalle in beiden Fällen erklärt werden könnte, so bleibt nur übrig, sie als eine Folge der verschiedenen inneren Beschaffenheit der Krystalle anzusehn. Nun gehören nach der vorliegenden Krystalltheorie zu den meisten Krystallsystemen, und so auch zum rhomboëdrischen (wohin der Bergkrystall), Punktsysteme mit entweder rechts- oder links-schraubenförmig angeordneten Punkten. Daher liegt es sehr nahe, die erwähnten schiefen elektrischen Zonen,

1) Uebersicht üb. d. Entwickelung d. Lehre v. d. Thermoëlektricität der Krystalle. In den Abh. d. math.-phys. Classe d. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 10 (1874). p. 364 u. 365. Ausführlicher in Bd. 8 (1868). p. 380 ff.

deren Mittellinien sich auf einem cylindrisch geschliffenen Bergkrystall in rechts- resp. linksgewundene Schrauben verwandeln müssen, als durch eine entsprechende schraubenförmige Anordnung der Krystallelemente bedingt anzusehn; freilich ohne dass man den Causalzusammenhang anzugeben im Stande wäre. Der hier aus dem pyroëlektrischen Verhalten gezogene Schluss auf den schraubenförmigen Bau wird in § 41 eine wesentliche Stütze finden, wo aus der Untersuchung des optischen Drehvermögens des Bergkrystalls sogar die Möglichkeit erwächst, bestimmte schraubenförmige Punktsysteme anzugeben als diejenigen, welche wahrscheinlich die Struktur des rechts- und des linksdrehenden Bergkrystalls darstellen.

Für den nahen Zusammenhang der Pyroëlektricität mit der Struktur sprechen ferner die jüngst[1]) von H. Hankel mitgetheilten Beobachtungen am hexagonalen Apatit, an welchem bekanntlich Dihexaëder und Säulen dritter Stellung auftreten. Diejenigen Exemplare desselben, welche beim Abkühlen positive Elektricität an den Säulenenden, negative auf den Seitenflächen annehmen (in seltneren Fällen fand nämlich gerade das Gegentheil Statt), zeigten die Maxima der negativen Erregung, d. h. die negativen elektrischen Pole, weder in den Flächenmitten der hexagonalen Säule erster Stellung, noch in denjenigen der Säule zweiter Stellung, sondern in 6 abwechselnden Kanten, welche die Flächen der Säule erster Stellung mit denjenigen der Säule zweiter Stellung bilden, und zwar schienen dies diejenigen Kanten zu sein, an welchen die Flächen der Pyramiden und Prismen dritter Stellung nicht auftreten. Weil nun die Struktur des Apatit vermuthlich eine solche ist, dass die Seiten der regulären Sechsecke der Projektionsfigur nicht parallel laufen zu den Seiten oder Höhen der durch die 6-zähligen Axen bestimmten dreieckigen Maschen, sondern irgendwie gegen letztere gedreht sind, so liegt es nahe, das Wegrücken der pyroëlektrischen Pole aus den Flächenmitten oder Kantenmitten der hexagonalen Grundsäule (woselbst sie sich bei anderen hexagonalen Substanzen vorfinden), als bedingt durch jene schiefe Stellung der Sechsecke anzusehn.

---

1) Wiedemann Ann. d. Phys. Bd. 6. p. 51. 1879.

§ 40. Zweite Gruppe von Eigenschaften.

Jede Eigenschaft dieser Gruppe ist dadurch charakterisirt, dass die Gleichheit nicht durchgängig auf krystallographisch übereinstimmende Richtungen beschränkt ist. Aus diesem Verhalten geht hervor, dass diese Eigenschaften nicht in einer so unmittelbaren Abhängigkeit von der Struktur stehn können, wie die vorigen; daher dürfen sie an dieser Stelle viel kürzer erledigt werden.

Das Verhalten der Krystalle gegen Strahlung, mag letztere nun *optisch* oder *thermisch* untersucht werden, ist für optisch 1-axige zuerst von Huygens, für 2-axige von Fresnel erkannt und jüngst durch H. W. Kohlrausch's Beobachtungen (Doctor-Dissertation) eingehend bestätigt. Es lässt sich am besten mit Hülfe des von Cauchy eingeführten Polarisationsellipsoides übersehen, dessen eigentliche mechanische Bedeutung als „Ellipsoid gleicher Arbeit“ aber erst von Herrn J. Stefan[1]) erkannt wurde. Jede Halbaxe dieses Ellipsoides ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der in ihre Richtung fallenden Hauptelasticität des Mediums, welches die Strahlung vermittelt. Legt man nun durch die Mitte des Ellipsoides eine Ebene parallel einer gegebenen Wellenebene, so geben die Hauptaxen der Schnittellipse die beiden Richtungen an, in welchen allein, in einer fortschreitenden Wellenebene, auf die Dauer Schwingungen stattfinden können, d. h. sie geben die Schwingungsrichtungen der beiden polarisirten Strahlen, in die ein einfallender Strahl zerlegt wird; und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebene, in welcher die Schwingungen eine dieser beiden Richtungen haben, ist umgekehrt proportional mit der betreffenden Ellipsenaxe. — Der Erfahrung zufolge ist nun das Ellipsoid gleicher Arbeit für Krystalle des *regulären* Systems eine Kugel, für Krystalle *mit einer Hauptaxe* (quadratisches, rhomboëdrisches, hexagonales System) ein Rotationsellipsoid, dessen Axe mit der Hauptaxe zusammenfällt; für Krystalle des *rhombischen* Systems ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Axen mit den Krystallaxen zusammenfallen; für *monokline* Krystalle ein ebensolches, von welchem eine Axe in die 2-zählige Drehungs-

---

1) Theorie d. doppelten Brechung. Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 50. II. 1865.

axe fällt; endlich für *trikline* Krystalle ein ebensolches von a priori nicht bestimmbarer Lage. Hiermit ist folgendes ausgedrückt: In regulären Krystallen geht die Strahlung nach sämmtlichen Richtungen in ganz gleicher Weise vor sich, es herrscht einfache Brechung und Constanz des Brechungsquotienten: *die Strahlung in regulären Krystallen ist also gänzlich unabhängig von der Richtung!* In Krystallen mit einer Hauptaxe geschieht die Strahlenfortpflanzung und Doppelbrechung in allen solchen Richtungen, welche denselben Winkel mit der Hauptaxe einschliessen, in völlig gleicher Weise, wie gross auch die Verschiedenheiten dieser Richtungen in krystallographischer und mechanischer Beziehung sein mögen. In Krystallen des rhombischen, monoklinen und triklinen Systems findet sich Gleichheit des Verhaltens gegen Strahlung im Allgemeinen in je 8 (paarweise entgegengesetzten) Richtungen, denn das 3-axige Ellipsoid besitzt 3 aufeinander senkrechte Symmetrieebenen, so dass je 8 Vektoren einander gleich sind. Nun kommt den Halbflächnern des rhombischen Systems und sämmtlichen Krystallen der beiden zuletzt angeführten Systeme keine so hohe Symmetrie zu; somit zeigt sich in diesen Fällen Gleichheit der Strahlung in krystallographisch ungleichen Richtungen, allerdings nur solange man die Vergleichung auf Strahlen von einerlei Wellenlänge beschränkt, denn in den 2 letzten Systemen haben 2, resp. alle 3 Axen des Ellipsoides gleicher Arbeit etwas verschiedene Lage für Strahlen verschiedener Wellenlänge.

Bezüglich der *Absorption* der Strahlen verhalten sich die Krystalle ganz analog wie bezüglich der Polarisation und Brechung; den speciellen Gestalten des Ellipsoides gleicher Arbeit: der Kugel, dem Rotationsellipsoid, dem 3-axigen Ellipsoid, entspricht also resp. ringsherum gleiche Absorption, Dichroismus, Trichroismus.

Auch für die *Reflexion an Krystallflächen* ist jenes Ellipsoid massgebend; *die Reflexion geht nämlich in gleicher Weise vor sich an allen gegen das Ellipsoid gleich gelegenen Flächen, auch wenn dieselben krystallographisch ungleichwerthig sind;* dagegen ist die Reflexion verschieden an Flächen von anderer Lage. Abgesehn von der theoretischen Entwickelung der Reflexion an Krystallflächen, welche zuerst von H. F. Neumann ausgeführt und vor Kurzem von H. Kirchhoff

wesentlich vereinfacht wurde, stützt sich der obige Satz freilich fast nur auf Beobachtungen am Kalkspath. Für diesen fand nämlich A. Seebeck,[1] „dass der Polarisationswinkel (ebenso wie die extraordinäre Brechung) zwar von der Neigung der Fläche gegen die Axe des Krystalls abhängt, nicht aber von ihrer besonderen Lage gegen die Krystallflächen, so dass z. B. die erste und zweite Säule gleiche Resultate geben. Hiernach musste auch die Fläche eines Rhomboëders und seines Gegenrhomboëders gleiche Polarisationswinkel geben.“ In der That gelang es Seebeck, letzteres experimentell zu bestätigen, freilich erst nachdem die grösste Sorgfalt auf das Anschleifen der künstlichen Fläche, mit Kreide als Schleifmittel, verwendet war. Vor Seebeck hatte nur Brewster die Reflexion an der natürlichen Bruchfläche und an einer Fläche eines sehr scharfen Dreiunddreikantners des Kalkspaths untersucht, sowie einige flüchtige Beobachtungen am Rothbleierz angestellt. Nachher hat sich H. F. Neumann experimentell mit diesem Gegenstand beschäftigt und die Uebereinstimmung der Beobachtungen mit seinen theoretischen Formeln nachgewiesen, jedoch mit Beschränkung auf eine einzige Fläche: die natürliche Bruchfläche des Kalkspaths. Auch H. de Sénarmonts[2]) Beobachtungen am Kalkspath, Quecksilberchlorür, Zinnoxyd, Antimonglanz und Eisenglanz bilden keinen directen Beweis für jenen Satz, so wichtig sie in anderer Beziehung auch sind. Trotzdem wird der obige Satz als feststehend gelten können, so dass auch diese Eigenschaft mit Recht zur zweiten Gruppe gestellt ist.

Darauf braucht kaum noch ausdrücklich hingewiesen zu werden, dass die optische Elasticität der Krystalle vollständig verschieden ist von der früher (§ 38) erläuterten gewöhnlichen oder rein mechanischen Elasticität, welche ja zur ersten Eigenschaftsgruppe gehört.

Was das Verhalten der Krystalle gegen die *Wärme* angeht, so ist zunächst ihre *Ausdehnung durch Wärme* völlig bestimmt, sobald man die Hauptausdehnungen kennt, welche

---

1) Pogg. Ann. 21. p. 290. 1831. Ueb. die Polarisationswinkel am Kalkspath.

2) Pogg. Ann. Erg.bd. II. 1848. p. 513. (Aus Ann. d. Ch. et d. Ph. Sér. III. T. 20.) Ueb. d. Refl. u. Doppelbr. d. Lichts durch metallisch undurchsicht. Kryst.

nach 3 ausgezeichneten, auf einander senkrechten Richtungen (thermischen Axen) stattfinden; eine bei einer bestimmten Temperatur aus einem Krystall hergestellte Kugel verwandelt sich nämlich bei irgend einer anderen Temperatur im Allgemeinen in ein Ellipsoid, dessen Hauptaxen in den thermischen Axen liegen. Dieses *Dilatationsellipsoid* ist bei regulären Krystallen eine Kugel, bei Krystallen mit Hauptaxen ein Rotationsellipsoid, bei den übrigen Krystallen ein 3-axiges Ellipsoid; und über die Richtungen seiner Axen gilt dasselbe, was bei dem Ellipsoid gleicher Arbeit gesagt ist, ohne dass jedoch in den 2 letzten Systemen die Axen beider Ellipsoide zusammenzufallen brauchten.[1]) Hiernach bleibt ein Krystall des regulären Systems bei jeder Temperatur sich selbst ähnlich: die Ausdehnung ist nach allen Richtungen gleich gross; ein Krystall mit Hauptaxe erfährt gleiche Ausdehnung nach allen solchen Richtungen, die denselben Winkel mit der Hauptaxe bilden, obgleich sie, abgesehn von einigen wenigen, krystallographisch völlig ungleichwerthig sind; ein Krystall des rhombischen, monoklinen oder triklinen Systems zeigt Gleichheit der thermischen Ausdehnung in je 8 (paarweise entgegengesetzten) Richtungen, also bei den 2 letzten Systemen in Richtungen, die nicht alle krystallographisch gleichartig sind.

In gleicher Weise wird die *Wärmeleitungsfähigkeit* der Krystalle im Allgemeinen durch die Radiivektoren eines Ellipsoides (oder doch einer vom Ellipsoid wenig abweichenden Fläche) dargestellt, so dass, für die Erwärmung von einem inneren Punkt aus, diese Fläche die Isotherme vorstellt. Auch hier erscheinen im regulären System und in den Systemen mit Hauptaxe die beiden Specialfälle des Ellipsoides: die Kugel und das Rotationsellipsoid, während bei den Krystallen der übrigen Systeme das dreiaxige Ellipsoid auftritt. Also herrscht auch für diese Eigenschaft vielfach Gleichheit in krystallographisch ungleichen Richtungen. Diese Resultate wurden bekanntlich zuerst von Herrn H. de Sénarmont[2]) gewonnen, der eine

---

1) Die ausgedehnteste und genaueste Untersuchung darüber stellte L. Fizeau an; vergl. Pogg. Ann. 128. 1866. Die Ausdehnung starrer Körper durch die Wärme.

2) Ann. d. Ch. et d. Phys. Sér. III. T. 22. p. 179. Vergl. Pogg. Ann. Bd. 73. p. 191. Bd. 74. p. 190. Bd. 75. p. 50. 1848. Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit krystallisirter Substanzen.

Fläche einer dünnen Krystallplatte mit Wachs überzog und die Erwärmung von einem durch ein kleines Loch der Platte gesteckten erhitzten Metallstift ausgehn liess; dann zeichnet sich die Isotherme der Wachsschmelztemperatur durch einen kleinen Wall eben schmelzenden Wachses ab, welcher mit dem Vorrücken dieser Temperatur über die Platte hin vorrückt, also im Allgemeinen eine immer wachsende Ellipse bildet. Eine bedeutende Vervollständigung dieser Untersuchung, aber ohne principiell neues Resultat, gab Herr Ed. Jannettaz,[1]) indem er 44 Mineralspecies der Untersuchung unterwarf und bei den meisten das Verhältniss der Axen des Wärmeleitungsellipsoides bestimmte. Eine Verbesserung der Methode wurde von H. Röntgen angegeben.

Bei der Untersuchung der Wärmeleitung einer gewöhnlichen Spaltungslamelle des Gypses machte Herr de Sénarmont noch folgende interessante Beobachtung.[2]) „Wenn man, statt den Gyps mit Wachs zu überziehn, die Erhitzung bis zu seiner *Entwässerung* treibt, so zeigt der kleine Cylinder von gebranntem Gyps, welcher das Loch umgiebt, ebenfalls eine elliptische Grundfläche von immer derselben Lage.“ Offenbar ist hier die Grenze des entwässerten Gypses als die Isotherme von derjenigen Temperatur aufzufassen, bei welcher der Gyps sein Wasser verliert (d. h. verwittert); die von gebranntem Gyps gebildete Figur ist also nichts anderes als die bei jener höheren Temperatur zu Stande gekommene Wärmeleitungsellipse. Ganz in diesem Sinne fasst auch H. Ångström den Vorgang auf.[3]) Nun hat Herr C. Pape,[4]) ganz unabhängig von dieser vereinzelten Sénarmontschen Beobachtung, den Vorgang der *Verwitterung* an einer grösseren Reihe wasserhaltiger Substanzen studirt, deren Verwitterung durch Einbringung in ein hinreichend warmes Luftbad bewirkt wird. Die an vielen unregelmässig vertheilten Stellen

1) Ann. d. Ch. et d. Phys. IV Sér. T. 29. p. 5. S. l. propagation d. l. chaleur dans les corps cristallisés. 1873.

2) Vergl. Pogg. Ann. Bd. 73. p. 191 ff.

3) Vergl. Pogg. Ann. Bd. 86. p. 227. 1852. Ueb. d. Mol.konst. d. monoklin. Krystalle.

4) Ueb. d. Verwitterungsellipsoid wasserhaltiger Krystalle. 1865. Pogg. Ann. Bd. 124. p. 329 und Bd. 125. p. 513. Ueb. d. Verwitt.ellipsoid u. das rechtwinklige Axensystem des Kupfervitriols. 1868. Pogg. Ann. Bd. 133. p. 364.

gleichzeitig beginnende Verwitterung lässt den Krystall mit lauter rundlichen Verwitterungsflecken bedeckt erscheinen. Das Vorrücken der Verwitterung, wenn man sie von einem Punkte des Krystallinnern ausgehend denkt, geschieht nun stets so, dass die Grenze der verwitterten Substanz von einer Oberfläche gebildet wird, die genau oder doch sehr genähert ein Ellipsoid ist. Was im Vorhergehenden über die Specialfälle und die Axenlage der Ellipsoide angegeben wurde, die das optische und thermische Verhalten beherrschen: das bestätigt sich auch hier vollständig. Zwar soll nach Herrn Pape bei den hexagonalen (und rhomboëdrischen) Krystallen das Verwitterungsellipsoid eine Kugel sein; indessen habe ich mich beim unterschwefelsauren Bleioxyd durch Beobachtung der Verwitterungsflecke auf einer zur Hauptaxe parallel angeschliffenen Fläche überzeugt, dass der zur Axe parallele Durchmesser der Verwitterungsfiguren länger als der darauf senkrechte ist (ungefähr im Verhältniss von 11 : 10). Also tritt auch hier das Rotationsellipsoid auf; freilich ist es ein so wenig verlängertes, dass bei Durchschneidung mit einer Ebene von der Lage der gewöhnlichsten Rhomboëderfläche (und diese hat Herr Pape untersucht), die Schnittfigur nicht mehr mit Sicherheit von einem Kreise unterschieden werden kann. — Herr Pape fasst das Vorrücken der Verwitterung als specifisch verschieden von der Wärmeleitung auf und unterstützt seine Ansicht sehr wesentlich durch Beobachtungen am Kupfervitriol, denen zufolge die Wärmeleitungsellipse und Verwitterungsellipse verschieden orientirt sind, so dass z. B. auf einer gewissen Krystallfläche ihre grossen Axen einen Winkel von 21° bilden.[1]) Nun verwittert der Kupfervitriol bei 46—50° C., während die Wärmeleitung durch Schmelzung eines Gemisches von Wachs und Kokusöl von der Schmelztemperatur 52,5° C. untersucht wurde; folglich lässt sich die verschiedene Orientirung auch nicht dadurch erklären, dass, wie Herr Angström am Gyps nachgewiesen hat,[2]) die Wärmeleitungsellipsen selbst verschiedene Orientirung haben je nach der Temperatur, bei der sie erzeugt werden. Trotz dieser Schwierigkeit halte ich es nicht für unwahr-

1) C. Pape: Die Wärmeleitung im ein und eingliedrigen Kupfervitriol. 1877. Wiedemann Ann. d. Phys. Bd. I. p. 126.

2) Pogg. Ann. Bd. 86. p. 227. 1852.

scheinlich, dass es gelingen wird, das Verwitterungsellipsoid auf dasjenige der Wärmeleitung zurückzuführen. — Unter allen Umständen aber steht fest, dass Gleichheit der Verwitterung nicht durchgängig nur auf krystallographisch gleichwerthige Richtungen beschränkt ist. Hierdurch stellt sich die Verwitterung sehr bestimmt als ein Vorgang von gänzlich anderer Natur dar als die Auflösung, welche Aetzfiguren erzeugt, und mit welcher man die Verwitterung oft in Parallele gestellt findet. Die Löslichkeit gehört zur ersten Gruppe von Eigenschaften, die Verwitterung zur zweiten.

Aehnlich dem Wärmeleitungsvermögen wird vermuthlich auch das *elektrische Leitungsvermögen* der Krystalle durch die Vektoren eines Ellipsoides dargestellt, welches beim regulären System und bei den Systemen mit Hauptaxe in eine Kugel, resp. in ein Rotationsellipsoid übergeht. Zu dieser Vermuthung berechtigen allerdings bisjetzt nur Versuche über die *oberflächliche* Leitungsfähigkeit der Krystalle, angestellt nach 2 verschiedenen Methoden. Herr G. Wiedemann[1]) liess Elektricität auf eine bestäubte Krystallplatte strömen und sah die Bestäubung verschieden weit zurückweichen. Herr de Sénarmont[2]) beobachtete die Lichterscheinung, mit welcher Elektricität in verdünnter Luft von einer auf eine Krystallplatte aufgesetzten Spitze zum kreisförmigen Rande der umgebenden Stanniolbelegung überging. Das übereinstimmende Ergebniss beider Versuchsreihen war, dass auf Flächen regulärer Krystalle und auf solchen Flächen optisch einaxiger Krystalle, die zur Hauptaxe senkrecht liegen, das elektrische Leitungsvermögen rings herum gleich ist, während es auf allen anderen Krystallflächen verschieden ist und zwar durch die Vektoren von ellipsenähnlichen Curven dargestellt wird (letzteres Ergebniss bei H. Sénarmonts Methode weniger hervortretend). — Ueber das innere Leitungsvermögen von Krystallen sind bisher wohl noch keine Resultate bekannt geworden.

Eine andere erst in den letzten Jahren untersuchte elek-

---

1) Ueb. d. elektrische Verhalten krystallisirter Körper. 1849. Pogg. Ann. Bd. 76. p. 404.

2) Mém. s. l. conductibilité superficielle des corps cristallisés pour l'électricité de tension. 1850. Ann. d. Chim. et d. Phys. Sér. III. T. 28. p. 257.

trische Eigenschaft der Krystalle ist die *diëlektrische Polarisation.* Faraday's Vorstellung, dass in einem schlechten Elektricitätsleiter (oder Diëlektrikum) unter Einfluss elektrischer Kräfte jede einzelne Molekel polar elektrisch erregt werde und nach Entfernung der äusseren Kräfte in den unelektrischen Zustand zurückkehre, erleidet für Krystalle die Verallgemeinerung, dass diese diëlektrische Polarisation nicht für alle Richtungen, von denen her elektrische Kräfte auf den Krystall wirken, gleich stark ist. Nun gelangt Herr Maxwell in seiner durch Verfolgung der Faradayschen Ideen entsprungenen eletromagnetischen Lichttheorie zu der Folgerung, dass die Quadratwurzel aus der Diëlektricitätskonstante eines Stoffs (letztere noch multiplicirt mit dem Coëfficienten der magnetischen Induktion, der aber kaum von 1 verschieden) gleich dem Lichtbrechungsquotienten desselben ist; folglich muss in einem Krystall die Diëlektricitätskonstante in allen den Richtungen verschieden sein, in denen die Lichtfortpflanzung verschieden ist. Diese Verschiedenheit der diëlektrischen Polarisation für verschiedene Richtungen eines und desselben Krystalls wurde zuerst von Herrn L. Boltzmann[1]) am Schwefel nachgewiesen, indem ein zu einer Kugel geschliffener Schwefelkrystall bei verschiedener Aufhängung verschieden stark von einer festen, stets auf dieselbe Weise geladenen, Leiterkugel angezogen wurde. — Von dem störenden Einflusse der elektrischen Leitung, welcher solche Untersuchungen kompliciren muss, befreite sich Herr E. Root[2]) dadurch, dass er den zu untersuchenden Körper mitten zwischen 2 vertikalen, nah gegenüberstehenden kreisförmigen Platten an einem Vertikalfaden aufhängte und die elektrische Ladung dieser Condensatorvorrichtung mit Hülfe eigens konstruirter Commutatoren in sehr schneller Folge (meist 100 bis 200mal sekundlich) umkehrte, ohne ihre absolute Grösse zu ändern. Zuverlässige Resultate wurden mit Quarz, Kalkspath, Arragonit und Schwefel gewonnen, aus welchen Stoffen Kreisscheiben, Linsen und Kugeln

1) „Ueb. d. Verschiedenheit der Diëlektricitätskonst. des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen.“ 1874. Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 70. p. 342. Im Auszuge in Pogg. Ann. Bd. 153. p. 531.

2) Zur Kenntniss der diëlektrischen Polarisation. 1876. In Pogg. Ann. Bd. 158. p. 1 u. p. 425.

hergestellt waren. Eine Quarzkugel stellt sich mit der optischen Axe genau axial, eine Kalkspathkugel genau äquatorial; wenn aber die optische Axe der letzteren mit der Drehaxe zusammenfällt, hat sie gar kein Drehungsmoment. Eine parallel der optischen Axe geschliffene Kalkspathscheibe, die in einem gewöhnlichen elektrischen Felde horizontal aufgehängt sich vermöge der *Leitung* so stellt, dass die optische Axe axial ist, stellt sich im dielektrischen Felde mit wechselnder Ladung genau äquatorial. Ebenso stellt sich eine Schwefelkugel hier in eine ganz bestimmte Ruhelage, während ihre Lage bei nicht wechselnder Ladung der Platten eine höchst zufällige ist. — Indem die Stärke der diëlektrischen Polarisation durch die Dauer der Schwingungen um die betreffende Gleichgewichtslage gemessen wurde, gelangte Herr Root zu dem Ergebniss, dass die Maxwellschen Elektroëlasticitätsaxen der Krystalle mit den optischen Elasticitätsaxen nach Richtung und relativer Grösse genau zusammenfallen, dass aber eine absolute Uebereinstimmung von Theorie und Erfahrung nur bei der Annahme erreichbar ist, dass eine vollkommene Leitung überall die Polarisation begleite. Herr Boltzmann hatte keine so grossen Differenzen von Theorie und Beobachtung gefunden. — Soviel geht jedenfalls aus den bisherigen Versuchen hervor, dass die diëlektrische Polarisation zur zweiten Gruppe von Eigenschaften gehört, denn sie ist nicht in allen krystallographisch ungleichen Richtungen verschieden (wie u. A. das Beispiel der mit der optischen Axe vertikal gehängten Kalkspathkugel beweist, die sich dann ganz indifferent verhält).

Schliesslich gehört noch das Verhalten der *Krystalle zwischen Magnetpolen* hierher. Während dasselbe nach den Versuchen und Anschauungen der Herren Knoblauch und Tyndall[1]) wesentlich von der mehr oder weniger dichten Anordnung der Theilchen abhängt und hiernach wohl zur ersten Gruppe von Eigenschaften gehören würde, so ist der endliche Schluss, zu dem Plücker,[2]) nach vorgängigen anderen

1) Knoblauch und Tyndall: Ueb. d. Verh. krystallisirter Körper zwischen den Polen eines Magneten. 1850. Pogg. Ann. Bd. 79 p. 233 und Bd. 81 p. 481. Ferner J. Tyndall: Ueb. Diamagnetismus u. magnekrystallinische Wirkung. 1851. Pogg. Ann. 83 p. 384.

2) Phil. Transact. 1858. Bd. 148 part. II.

Erklärungsversuchen, durch seine Experimente gelangte, dieser: dass das fragliche Verhalten ganz analog dem optischen durch ein gewisses Ellipsoid vollkommen bestimmt ist, was übrigens Herr W. Thomson[1]) schon 1851 theoretisch abgeleitet hatte. Dieses Ellipsoid ist bei Krystallen mit Hauptaxe ein Rotationsellipsoid, bei regulären Krystallen eine Kugel, bei Krystallen der übrigen Systeme ein dreiaxiges, und zwar fallen beim rhombischen System seine Axen in die Krystallaxen, beim monoklinen liegt eine Axe in der 2-zähligen Drehaxe. Die Beobachtungen lehren nämlich, dass sich in magnetischer, resp. diamagnetischer Beziehung die regulären Krystalle wie unkrystallisirte homogene Körper verhalten, dass ferner die Krystalle mit Hauptaxe nach allen solchen Richtungen gleiches Verhalten zeigen, welche denselben Winkel mit der Hauptaxe bilden, und endlich dass es in allen übrigen Krystallen, entsprechend den 2 optischen Axen, zwei magnetische Linien giebt, die senkrecht auf den Kreisschnitten jenes Ellipsoides stehn und dadurch ausgezeichnet sind, dass ein Krystall, der nur um eine dieser Linien drehbar aufgehängt ist, ringsherum in gleicher Weise von den Magnetpolen beeinflusst wird, d. h. kein Drehungsbestreben zeigt. Aus diesem Gesammtverhalten folgt allerdings, dass diese Eigenschaft der Krystalle zur zweiten Gruppe gehört.

Der Ueberblick über sämmtliche in diesem Paragraphen behandelte Eigenschaften lehrt, dass jede von ihnen als Funktion der Richtung genau oder doch nahezu vermittelst der Vektoren eines Ellipsoides (mit den Specialfällen der Kugel und des Rotationsellipsoides) dargestellt wird.[2]) Hiermit ist ausgesprochen, dass bei jeder dieser Eigenschaften die Gleichheit im Allgemeinen nicht auf krystallographisch übereinstimmende Richtung beschränkt ist, und dass folglich alle diese Eigenschaften mit Recht zur zweiten Gruppe ge-

---

1) Phil. Magaz. IV. Ser. vol. I. p. 177.

2) Die Krystalle des regulären Systems verhalten sich, wie man bemerkt, bezüglich sämmtlicher Eigenschaften der zweiten Gruppe genau so wie isotrope Körper. Daher findet man sie jetzt oft als „isotrope Krystalle“ bezeichnet. Dieser Sprachgebrauch ist nicht zu billigen, denn bezüglich sämmtlicher Eigenschaften der ersten Gruppe verhalten sie sich keineswegs wie isotrope Körper.

stellt sind. Ob diese den Eigenschaften der zweiten Gruppe eigenthümliche lockrere Beziehung zur Struktur, wie Savart vermuthete, dahin zu deuten ist, dass diese Eigenschaften unmittelbar durch die Beschaffenheit der einzelnen Molekeln bedingt sind, oder ob man zu dem Medium des Aethers seine Zuflucht nehmen muss, dessen Dichtigkeit oder Elasticität durch die Massentheilchen verhältnissmässig nur in geringem Grade beeinflusst zu denken sind: das zu entscheiden ist man beim jetzigen Zustande der Kenntnisse nicht in der Lage. — Wenn es nun schon bei den Eigenschaften der ersten Gruppe nicht ausführbar war, die Thatsachen zahlenmässig mit der Theorie zu vergleichen, so ist eine solche Vergleichung für die hier vorliegenden Eigenschaften, die so viel lockerer an die Struktur gebunden erscheinen, noch weniger durchführbar; man muss sich vielmehr darauf beschränken, zu konstatiren, dass in solchen Richtungen, für welche die Theorie eine übereinstimmende Anordnung der Krystallelemente angiebt, d. h. welche krystallographisch übereinstimmen, auch stets Gleichheit des physikalischen Verhaltens herrscht; und ferner, dass keine einzige Thatsache mit der Theorie in Widerspruch steht.

§ 41. Zweite Gruppe von Eigenschaften, Fortsetzung. Das optische Drehvermögen von Krystallen.

Zu den Eigenschaften der zweiten Gruppe gehört auch eine, nur bei verhältnissmässig wenigen krystallisirten Substanzen auftretende Erscheinung, für welche es jedoch gelingt, einen unmittelbaren Zusammenhang mit der Struktur nicht nur im Allgemeinen nachzuweisen, sondern denselben sogar soweit zu verfolgen, dass sich ganz bestimmte Punktsysteme als die Strukturformen jener Krystalle — wenigstens mit grosser Wahrscheinlichkeit—angeben lassen; diese Erscheinung ist die Drehung der Polarisationsebene eines durchgehenden Strahls. Von jedem der mit dieser Eigenschaft begabten Stoffe giebt es 2 Varietäten, welche die Drehung in gleicher Stärke, aber mit gerade entgegengesetztem Drehungssinn zeigen. Seit J. Herschel am Bergkrystall nachwies, dass sich die rechts und die links drehenden Exemplare durch das Auftreten der einen oder der anderen Art von trigonalen Trapezoëdern in

ganz bestimmter Weise unterscheiden, hat man entsprechende krystallographische Unterschiede auch bei allen übrigen optisch drehenden Substanzen nachweisen können, wenn auch die unterscheidenden Flächen nicht immer bei allen Exemplaren ausgebildet sind. Die Formen der rechts und der links drehenden Varietät stellen sich als *enantiomorph* heraus, d. h. sie sind einander genau entsprechend, aber symmetrisch wie Objekt und Spiegelbild, ohne deckbar zu sein. Dass diese Enantiomorphie der äusseren Form auf einer Enantiomorphie der Struktur beruht, ist dadurch unzweifelhaft erwiesen, dass die auf den Flächen solcher Krystalle hervorgerufenen Aetzfiguren ebendenselben Gegensatz darbieten. (Vergl. die Untersuchungen von Leydolt und Baumhauer.) Das Vorkommen enantiomorpher Gebilde bietet für die vorliegende Theorie nicht nur keine Schwierigkeit, sondern es dient derselben geradezu als eine Bestätigung; denn wie man im regulären Krystallsystem und in den mit Hauptaxe begabten Krystallsystemen optisch rechts und links drehende Krystalle kennt, welche paarweise enantiomorph sind, so enthalten alle jenen Krystallsystemen entsprechenden Abtheilungen des § 27 (VI, VII, III, IV, V) solche Punktsysteme, die einander als enantiomorphe Gebilde paarweise zugeordnet sind: hierher gehören vor Allem die rechten und linken Schraubensysteme, ausserdem aber auch solche Gebilde, wie das rhombische Sphenoid (gleichflächige Tetraëder) der Abtheilung II, B, der 12-punktner und 24-punktner der Abtheilungen VI und VII, und andere, welche sämmtlich entweder als die eine oder als die andere von 2 enantiomorphen Varietäten vorkommen.

Es darf indessen nicht unbemerkt bleiben, dass die Enantiomorphie zwar eine nothwendige, aber nicht die einzige Bedingung für das Vorhandensein des optischen Drehvermögens von Krystallen ist, denn man kennt Krystalle, die, trotzdem dass sie die Bedingung der Enantiomorphie erfüllen, die Polarisationsebene doch nicht drehen. Hierher gehören alle Krystalle mit rhombischen Sphenoiden; denn von so krystallisirenden Stoffen drehn nur die Lösungen, während die Krystalle selbst sich in optischer Beziehung durch nichts von anderen optisch 2-axigen Krystallen unterscheiden. Hierher gehören ferner (nach mündlichen Mittheilungen des Herrn L. Wulff in Karlsruhe) die in enantiomorphen Formen des

regulären Systems auftretenden isomorphen salpetersauren Salze des Blei, Baryum, Strontium, welche weder im festen noch im gelösten Zustande optisch aktiv sind.

Obgleich sonach die Enantiomorphie nicht als Ursache des optischen Drehvermögens von Krystallen angesehn werden darf, so ist man mit Hülfe der vorliegenden Krystalltheorie doch im Stande, den zureichenden Grund für dasselbe anzugeben und zugleich zu zeigen, *dass solche Krystalle enantiomorph sein müssen.* Der Weg, auf welchem dies gelingt, ist aber nicht der von Fresnel angebahnte. Fresnel führte bekanntlich die Erscheinung darauf zurück, dass ein geradlinig poralisirter Strahl sich im Innern eines drehenden Krystalls in 2 entgegengesetzt cirkulare Strahlen zerlege, welche mit ungleicher Geschwindigkeit fortschreiten. Nun könnte man etwa annehmen, diese Zerlegung entspreche den in einigen Punktsystemen gleichzeitig nebeneinander vorhandenen rechten und linken Schrauben von verschiedener Windungsweite (vergl. z. B. die Gegenschraubensysteme IV 28 und 34); aber diese Vermuthung ist doch höchst gewagt und unsicher. Fresnel selbst konnte für jene Zerlegung keinen Grund angeben, doch vermuthete er, die Aethermoleküle seien im Quarz in Schrauben angeordnet, deren Axen parallel der optischen Axe seien. Indessen zeigt sich diese Annahme nach Herrn Ch. Briots[1]) Rechnung unvermögend zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene, indem die einfache Torsion in einer Schraubenlinie keinerlei Wirkung auf die der Schraubenaxe parallelen Strahlen ausübt. Es folgt hieraus, dass die Dissymmetrie des Aethers in den drehenden Krystallen eine komplicirtere sein muss. Weil nun die Rechnung lehrte, dass sich ein zur Axe der Aetherschrauben senkrechter Strahl in zwei entgegengesetzt rotirende elliptische Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit theilen muss, so machte Herr Briot die Annahme, im Quarz sei der Aether nach Schrauben von durchweg gleichem Drehungssinn, aber verschiedener Richtung geordnet, nämlich so dass die Schraubenaxen mit den Radien der sechsseitigen Basis des Quarz-

1) Versuche über die math. Theorie des Lichts. Deutsch von Klinkerfues. 1867 (Original 1863). Buch IV. Cap. 3. Siehe auch die Vorrede p. XVIII—XXI.

prismas der Reihe nach zusammenfallen. Wenn nun auch die hierbei sich ergebenden Formeln die Erscheinungen des Quarz im Wesentlichen darstellen, so erscheint diese Theorie doch wenig naturgemäss, denn keine geometrische Eigenschaft der Quarzkrystalle weist auf eine Anordnung der Theilchen nach Schrauben von der hier geforderten Lage hin; vielmehr verrathen die Trapezflächen deutlich eine Struktur nach Schrauben, deren Axen in der Hauptaxenrichtung liegen.

Der Schlüssel zum Verständniss der Erscheinung ist vielmehr gegeben durch folgende merkwürdige Entdeckung des Herrn v. Reusch.[1]) Wenn man eine grössere Anzahl (12—36) Blättchen zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke so aufeinander schichtet, dass die (zur Fläche der Blättchen etwa senkrecht stehende) optische Axenebene jedes neu hinzugefügten Blättchens gegen die des darunter liegenden um 120 Grad im Uhrzeigersinn gedreht ist, so dreht diese *Glimmerkombination* die Polarisationsebene eines senkrecht hindurchgehenden Strahls ebenfalls im Uhrzeigersinn; mit anderen Worten: sie verhält sich im Polarisationsapparat ähnlich wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Platte *rechtsdrehenden* Quarzes. Hat man in entgegengesetztem Drehungssinn aufgeschichtet, so ist die Kombination *linksdrehend.* Die Analogie mit dem Verhalten des Quarzes ist so gross, dass man z. B. mit 2 entgegengesetzt drehenden Glimmerkombinationen von übrigens gleicher Beschaffenheit die Airyschen Spiralen eben so schön erhält wie mit 2 entgegengesetzten Quarzplatten. Bei Drehung des Präparats um den hindurchgehenden Strahl als Axe bemerkte Herr v. Reusch gewisse kleine Aenderungen der Farbenerscheinung, doch vermuthete er, dass sich das Verhalten der Glimmerkombination dem des Quarzes um so mehr nähern werde, je dünner die Lamellen und je grösser ihre Anzahl. Auf Grund solcher Beobachtungen hat schon Herr Josiah P. Cooke, Jr.[2]) die

---

1) Monatsber. d. K. Akad. d. Wissensch. Berlin. Gesammtsitzung 8. Juli 1869: „Ueber Glimmerkombinationen". Seite 530. Auch in Pogg. Ann. Bd. 138. Seite 628.

2) The Vermiculites, together with a discussion of the cause of the variation of the optical angle of the micas. In den Proceedings of th. Amer. Acad. of arts and sciences. Cambridge Massachusetts. 1874.

Meinung ausgesprochen, dass die optischen Erscheinungen des Quarzes durch eine analoge Molekularstruktur erzeugt würden, ohne indessen einen zwingenden Beweis dafür beizubringen. Schon früher ist eine ähnliche Ansicht von Herrn G. Hinrichs[1]) ausgesprochen, doch erscheint dieselbe noch willkürlicher und unbewiesener.

Es ist mir nun gelungen, das optische Drehvermögen von Krystallen in — wie mir scheint — überzeugender Weise als bedingt durch ihre der Glimmerkombination analoge Struktur nachzuweisen,[2]) indem ich die Erscheinungen, welche vielblättrige Glimmerkombinationen und auch solche von nur 3 Blättern (Triaden) in parallelem Lichte darbieten, eingehend untersuchte, und namentlich diejenigen Veränderungen der Erscheinung verfolgte, welche bei Anwendung von dünneren und dünneren Blättchen eintreten. Die Erscheinungen, welche eine Triade bei senkrechtem Durchgang eines ursprünglich geradlinig polarisirten parallelen Strahlenbündels darbietet, lassen sich theoretisch auf Grund der Undulationstheorie vollständig verfolgen, indem nur die Thatsache zu Grunde gelegt wird, dass sich in einem Glimmerblättchen ein senkrecht auffallender Strahl in 2 senkrecht aufeinander polarisirte, in derselben Linie bleibende, aber verschieden schnell fortschreitende Strahlen zerlegt. Im Allgemeinen tritt dann aus der Triade ein elliptisch polarisirter Strahl aus; und der Winkel, welchen die grosse Axe seiner Schwingungsellipse mit der Schwingungsrichtung des ursprünglichen Strahls bildet, muss in diesem Falle als die „Drehung der Polarisationsebene“ aufgefasst werden. Die Erscheinung zeigt sich im Allgemeinen noch abhängig vom Azimuth, d. h. von dem Winkel, den die Polarisationsebene des einfallenden Strahls mit der optischen Axenebene des erstgetroffenen Blättchens bildet. Die wesentlichsten hergehörigen Resultate, die ich auf experimentellem und theoretischem Wege überein-

1) Ueb. den Bau des Quarzes. In den Sitzungsber. d. Wien. Akad. 1870. Bd. 61. Abth. I. Seite 83—88.

2) Mathem. Annalen von Clebsch-Neumann. Bd. IX. S. 504—529. 1876: Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. Ferner: Pogg. Ann. Ergänzungsband VIII. 1878. Seite 16—64. Die Glimmerkombination von Reusch und das optische Drehvermögen von Krystallen.

stimmend erhielt, sind folgende[1]): (dabei bedeutet d die Blättchendicke, T die Undulationsdauer der angewandten Lichtart, o und e die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellenebenen, welche aus einer einfallenden Wellenebene entspringen):

1) Je dünner die Blättchen einer *Triade*, um so mehr gestreckt elliptisch schwingt der austretende Strahl bei allen Azimuthen. Schon wenn die Blättchendicke eine solche ist, dass die dritte Potenz der Grösse $s^2 = \sin^2 \frac{d\pi}{T}\left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e}\right)$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist der austretende Strahl nicht mehr merklich von einem geradlinig polarisirten verschieden. Ebenso tritt aus einer *mehrblättrigen* Glimmerkombination, wie sie durch parallele Aufschichtung von irgend wie viel Triaden von so geringer Blättchendicke entsteht, ein merklich nur geradlinig polarisirter Strahl aus.

2) Je dünner die Blättchen einer Triade, um so weniger ist die Drehung der Polarisationsebene vom Azimuth abhängig. Sind die Blättchen so dünn, dass das Quadrat der Grösse s^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist die Drehung unabhängig vom Azimuth. *In diesem Falle ist die durch parallele Aufschichtung von n kongruenten Triaden bewirkte Drehung n mal so gross als die der einzelnen Triade, also proportional mit der Triadenzahl, also auch proportional mit der Dicke des Präparats.* Für eine sehr dünnblättrige Triade ist die Drehung sehr klein; aber durch hinreichend vervielfältigte Aufschichtung von Triaden kann natürlich eine beliebig grosse Drehung hervorgerufen werden.

3) Die Drehung in Kombinationen von 3 oder mehr Blättchen ist abhängig von der Wellenlänge λ. *Diese Abhängigkeit lässt sich* mit grosser Annäherung *durch die von Herrn Boltzmann verbesserte Biotsche Formel der Drehung* φ *im Quarz:* $\varphi = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4}$ *darstellen* (natürlich mit anderen Zahlwerthen der Konstanten a und b), und zwar um so treffender, je dünner die Blättchen.

4) Je mehr die Richtung der Strahlen von der Norma-

---

1) Pogg. Ann. Ergbd. VIII. Seite 59 u. 60.

len auf den Blättchen abweicht, um so mehr verliert sich die Erscheinung der Drehung.

Aus diesen Thatsachen folgt, dass man bei fortgesetzter Verminderung der Blättchendicke zu Kombinationen gelangen muss, deren Drehwirkung mit derjenigen des Quarzes und anderer drehender Krystalle qualitativ völlig übereinstimmt.

Wenn schon aus diesem Ergebniss der Induktionsschluss völlig gerechtfertigt erscheint, *dass die Struktur des Quarzes und anderer drehender Krystalle dem Bau jener Glimmerkombination analog sei*, so gewinnt dieser Schluss dadurch noch ganz wesentlich an Wahrscheinlichkeit, dass unter den regelmässigen Punktsystemen wirklich nicht wenige enthalten sind, welche eine vollkommen analoge Punktanordnung darbieten, wie die Glimmerkombination: es sind vor Allem *die Schraubensysteme mit 2-zähligen Queraxen* (Nr. 19, 20; 23, 24; 32, 33; 38, 39; 48, 49; 57, 58; 65, 66 des § 27), wie jetzt am Beispiele des rechten, resp. linken, zusammengesetzten 3-punktschraubensystems (Taf. II. Fig. 19) erläutert werden soll. Statt dieses System als aus parallel stehenden zusammengesetzten 3-punktschrauben gebildet aufzufassen, betrachte man es aus einem anderen Gesichtspunkt. Eine durch einen Punkt des Systems gelegte Hauptebene (senkrecht zur 3-zähligen Axe) ist besetzt mit einem Punktnetz von gleichseitig 3-eckigen Maschen; eine solche Ebene heisse eine Molekularebene. Führt man um eine zu dieser Ebene nächstbenachbarte 2-zählige Queraxe, welche 2 nächste 3-zählige Axen schneidet, die betreffende Drehung um 180° aus, so gelangt jene Molekularebene in eine neue Lage, parallel zur vorigen, und 2 *solche* Punkte, die bezüglich der einen und der anderen Ebene angehören und einander so nah als möglich stehn, bilden eins der früher betrachteten Punktpaare. Das Molekularebenenpaar (in der Figur durch alle gleich tief schattirten Kreise dargestellt) besitzt nun vollkommen den geometrischen Charakter eines monoklinen Krystalls, denn für einen solchen ist ja ebenfalls das Vorhandensein 2-zähliger Drehaxen von einer einzigen Richtung charakteristisch.

Ertheilt man jetzt dem Molekularebenenpaar eine Schraubung mit einer Drehungskomponente von 120° um eine 3-zählige Hauptaxe, — sei es im Uhrzeigersinn, sei es entgegengesetzt, — und wiederholt diese Schraubungen in

demselben Sinne beliebig oft, so ist damit das ganze Punktsystem konstruirt; man erkennt aber auf diese Art, dass es sich ansehn lässt als aus lauter kongruenten Molekularebenenpaaren aufgeschichtet, deren jedes gegen das vorhergehende um 120° um eine auf ihnen senkrechte Axe gedreht ist. Indem nun das einzelne Molekularebenenpaar, wie erwähnt, den geometrischen Charakter eines monoklinen Krystallblättchens besitzt, ist es völlig analog einem optisch 2-axigen Glimmerblättchen; also stellt sich eine vollständige Analogie dieses Punktsystems mit einer aus äusserst dünnen Blättchen hergestellten Glimmerkombination heraus. Indem sich nun solche zusammengesetzte Schraubensysteme in allen denjenigen Krystallsystemen vorfinden, in welchen man bisher optisch drehende Krystalle nachgewiesen hat (im regulären Krystallsystem gehören die Punktsysteme 65 und 66 genau hierher; aber auch die Systeme 57 und 58 haben wenigstens ähnlichen Charakter), so erscheint die Ansicht völlig gerechtfertigt, dass als Ursache des Drehvermögens von Krystallen jene Schraubenstruktur anzusehen sei. Es sind also nicht die von Fresnel geahnten einfachen Schrauben, sondern zusammengesetzte, welche der Quarzerscheinung zu Grunde liegen. Der hiermit aufgedeckte Zusammenhang des optischen Drehvermögens mit einer Schraubenstruktur scheint besonders geeignet, die ganze vorgetragene Theorie der Krystallstruktur zu bestätigen.

Wenn ein drehender Krystall in Lösung geht, so ist es nicht undenkbar, dass der Zerfall in einzelne Molekeln nicht vollständig stattfindet, sondern dass noch grössere Molekelkomplexe oder Krystallbruchstücke übrig bleiben, die dann als Ursache des Drehvermögens der Lösung anzusehen wären. So könnte es sich z. B. vielleicht beim schwefelsauren Strychnin verhalten, welches allein unter allen bisher untersuchten Körpern sowohl im krystallisirten als im gelösten Zustande dreht. Für diejenigen Substanzen jedoch, welche nur in Lösung drehen, wird man wohl mit Herrn J. H. van 't Hoff[1]) die Ursache der Drehung unmittelbar in der Struktur der chemischen Molekel suchen müssen, deren Gestalt in solchen

1) La chimie dans l'espace. Deutsch von F. Herrmann: Die Lagerung der Atome im Raume. Braunschweig 1877.

Fällen aus chemischen Gründen als ein unregelmässiges Tetraëder (in speciellen Fällen wohl auch als ein gleichflächiges, d. h. als rhombisches Sphenoid) vorauszusetzen ist. Zu jedem solchen giebt es nämlich ein enantiomorphes Tetraëder. Wenn beim Krystallisiren solche Formen zusammentreten, so können sie etwa ein System wie Nr. 5, 7, 8 oder 10 (§ 27) bilden; demselben wird dann zwar noch der betreffende rechte resp. linke Charakter innewohnen; das Aufhören der Drehung lässt sich aber vielleicht so verstehen: Die Struktur ist jetzt nicht diejenige einer zusammengesetzten Schraube, und die Drehung des einzelnen rhombischen Sphenoides ist etwa dadurch vernichtet zu denken, dass die einander zugewandten Punktpaare zweier benachbarter Sphenoide selbst ein rhombisches Sphenoid, jedoch von entgegengesetztem Drehungssinn, bilden. Entsprechendes würde von zusammentretenden 12-punktnern oder 24-punktnern gelten. — Möglicherweise ist, wie hier nebenbei bemerkt sei, die Entgegengesetztheit der zu Grunde liegenden 12-punktner auch die Ursache für das entgegengesetzte thermoëlektrische Verhalten verschiedener Exemplare von Schwefelkies, und ebenso von Kobaltglanz, Speiskobalt und Chloanthit, welches von den Herren Hankel, Marbach Friedel, Gust. Rose und Groth studirt worden ist.

§ 42. Schluss.

Die im Vorstehenden entwickelte, mit der Erfahrung gut übereinstimmende Theorie ist ihrer Natur nach, wie schon mehrfach hervorgehoben wurde, eine rein geometrische, keine mechanische; sie dringt also nicht bis zu den eigentlichen Ursachen vor. Welche von den regelmässigen Punktsystemen statisch möglich sind, ist ganz unentschieden geblieben. Als nächste Aufgabe bietet sich daher folgende dar: „Für jedes der regelmässigen Punktsysteme zu untersuchen, was für Eigenschaften und Kräfte das, bisher durch einen Punkt ersetzte, Krystallelement besitzen muss, damit es mit seinesgleichen gerade zu jener bestimmten Strukturform zusammentritt;“ mit anderen Worten: „Es muss die Abhängigkeit der Krystallstruktur von der Beschaffenheit der Molekel ermittelt werden“. Wenn wir nun auch sehr weit davon entfernt sind, über diese Kardinalfrage schon irgend etwas zu wissen, so

scheint doch ihre Beantwortung mit Hülfe dieser geometrischen Theorie einigermassen in das Bereich der Möglichkeit gerückt. Hat man nämlich für einen krystallisirenden Stoff, auf Grund seiner geometrischen und physikalischen Eigenschaften, unter allen möglichen Strukturformen diejenige ermittelt, welche ihm wahrscheinlich zukommt, und kennt man andererseits die chemische Zusammensetzung seiner Molekel, so kann es vielleicht gelingen, einen Zusammenhang zwischen dem Bau der Molekel und der Strukturform zu entdecken. So eröffnet diese Theorie die Aussicht auf eine, wenn auch wohl noch ferne, Beantwortung der interessantesten wissenschaftlichen Fragen.

Berichtigung.

In Fig. 19 auf Seite 73 sollen die 3 links stehenden, durch kleine Kreise resp. ein Kreuz bezeichneten Orte sich genau in denselben Horizontalreihen wie die Orte des rechten Theils der Figur befinden.

Erklärung der Tafeln.

Die Figuren der folgenden 5 Tafeln stellen — mit Weglassung aller Deckbewegungsaxen — lediglich die regelmässigen Punktsysteme vor; dabei ist jeder Systempunkt durch einen Kreis veranschaulicht, welcher um so tiefer schattirt ist, je weiter entfernt von der Zeichnungsfläche stehend er gedacht werden soll. *n* aufeinander folgende Punkte einer *n*-punktschraube erscheinen hier also als *n* Kreise, von welchen jeder folgende tiefer schattirt ist als der vorhergehende, und deren Centra selbst auf einem Kreise angeordnet sind. Eine solche Schraube ist *rechts* oder *links* gewunden, je nachdem man durch die tiefere Schattirung die grössere Entfernung *unterhalb* oder *oberhalb* der Zeichnungsfläche angedeutet denkt. Abgesehen von Fig. I (Taf. I) und Fig. 54 und 59 (Taf. V) stellt jeder Kreis die Projektion von unendlich vielen, in gleichen Abständen übereinander liegenden Punkten vor.

Zwei dicht beisammenstehende Kreise, deren einer vollständig vorhanden, während der andere nur zum Theil sichtbar ist, weil er sonst in den anderen hineingreifen würde, bedeuten 2 in verschiedener Entfernung von der Projektionsebene, jedoch nicht weit von einander befindliche, Systempunkte. Ein solches Kreispaar ist auffassbar als Abbildung zweier Kugeln, deren eine von der anderen z. Th. verdeckt wird, so wie es in den im § 29 beschriebenen Modellen vorkommt.

Jede der Figuren 57, 58 (Taf. IV) und 62 bis 65 (Taf. V) besteht aus 3 durch dicke Striche getrennten Theilen, welche folgende Bedeutung haben: Ein jedes der durch diese Figuren dargestellten Punktsysteme besteht aus 3, nach 3 senkrechten Richtungen durcheinander gesteckten Theilsystemen. Wenn man nun durch irgend einen Ort 3 Ebenen legt, bezüglich senkrecht auf den Hauptaxen der 3 Theilsysteme, so dass sie Hauptebenen für letztere sind, wenn man alsdann jedes Theilsystem für sich auf diese seine Hauptebene projicirt, und dann 2 jener Hauptebenen in die Fläche der dritten umklappt, so ist eine der fraglichen Figuren konstruirt.

1. A[illegible]tem. II A.

4. System der klinorhombischen Säule. II A.

5. Syst[illegible] erster Art. II B α.

8. Rhombenoktaëdersystem. II B α.

9. Zus[illegible]ensystem. II B β.
2-pu[illegible]

12. Abwechselndes rechteckiges 2-punkt-schraubensystem erster Art. II B γ.

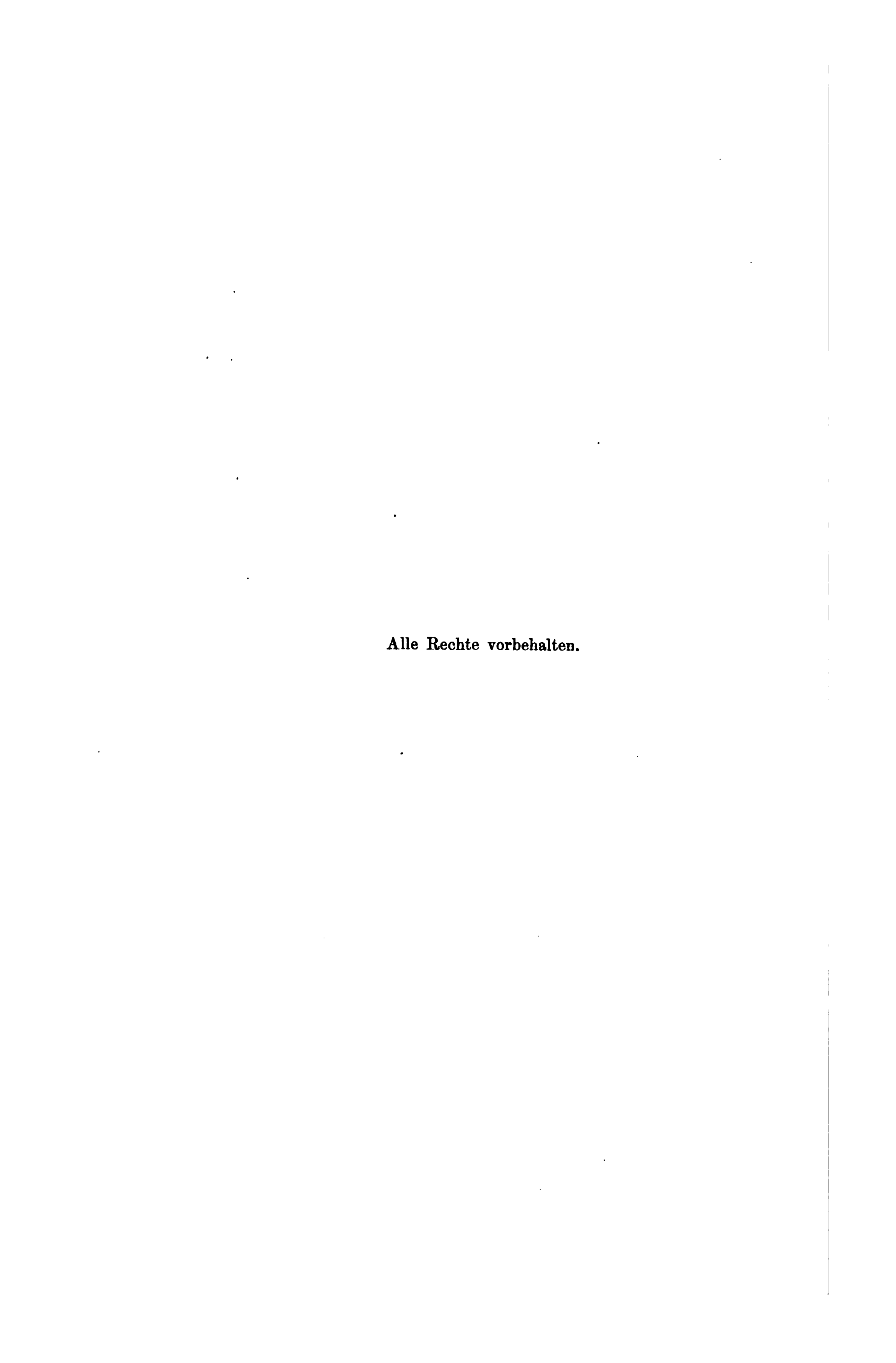
Der Ursprung
der
Gewitter-Elektricität
und der
gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre.

Eine meteorologisch-physikalische Untersuchung

von

Dr. Leonhard Sohncke,
ordentl. Professor der Physik an der Universität Jena.

Jena,
Verlag von Gustav Fischer.
1885.



Vorrede.

Meine Beschäftigung mit dem Gegenstande dieses Schriftchens reicht beinahe dreizehn Jahre zurück; sie datirt nämlich vom Jahre 1872, als ich nebst zwei Collegen von der Leipziger Meteorologen-Conferenz mit dem Auftrage betraut wurde, für den im folgenden Jahre zusammentretenden ersten internationalen Meteorologen-Congress in Wien einen Bericht über atmosphärische Elektricität abzufassen. Seit jener Zeit bin ich wiederholt, sei es mit Versuchen, sei es nur mit Ueberlegungen, auf diesen Gegenstand zurückgekommen. Seit etwa drei Jahren hatten nun meine Ansichten festere Gestalt gewonnen, doch hinderte mich der Wechsel des Wohnorts und die Gründung eines neuen physikalischen Instituts an der endgiltigen Formulirung. Erst im verflossenen Herbst konnte die Arbeit wieder ernstlich in Angriff genommen werden, und im Laufe des Winters wurden dann die schon $2^1/_2$ Jahre früher begonnenen Versuche zu Ende geführt.

Das so entstandene Schriftchen wendet sich nun zwar vorzugsweise, aber doch keineswegs ausschliesslich, an Physiker und Meteorologen. Da nämlich dem reinen Fachphysiker manche meteorologischen Anschauungen weniger geläufig sind, dem Meteorologen wiederum manche physikalische Details nicht genau bekannt sein möchten, so musste die Darstellung, wenn sie beiden Kreisen gleichmässig genügen sollte, mehr allgemein verständlich gehalten werden. So ist es gekommen, dass die Schrift schliesslich eine ziemlich populäre Form bekommen hat und wohl von jedem für naturwissenschaftliche Dinge sich interessirenden Ge-

bildeten verstanden werden kann. Freilich wird der Fachmann nun mancherlei bekannte Dinge mit einer für ihn überflüssigen Ausführlichkeit auseinander gesetzt finden. So mag besonders wohl der zweite Abschnitt, insoweit er näher auf einen Theil der meteorologischen Optik eingeht, etwas zu ausführlich gerathen sein; dasselbe gilt wohl auch von den im dritten Abschnitt enthaltenen Erörterungen über aufsteigende Luftströme.

Als der Druck schon im vollen Gange war, wurde ich von befreundeter Seite darauf aufmerksam gemacht, dass die Herren Becquerel und Faye in der Sitzung der Pariser Akademie vom 12. Januar 1885 in grösster Kürze über zwei Abhandlungen von Herrn Luvini, welche die Bildung des Hagels und die atmosphärische Elektricität betreffen, berichtet haben. Diese mir bisher entgangene, freilich sehr dürftige Notiz lässt wenigstens so viel erkennen, dass Luvini seinen Auseinandersetzungen denselben Gedanken zu Grunde legt, der im Folgenden durchgeführt ist. In wieweit der Gang seiner Beweisführung mit dem meinigen übereinstimmt, weiss ich nicht, da ich das in jener Notiz als soeben erschienen angekündigte Werk Luvinis bisher noch nicht gesehen habe.

Jena, d. 15. Mai 1885.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Im Folgenden soll nicht eine vollständige Theorie aller Gewitter-Erscheinungen gegeben werden; die wesentliche Absicht ist vielmehr nur: nachzuweisen, dass stets, wenn die für den Ausbruch eines Gewitters erfahrungsgemäss nothwendigen meteorologischen Bedingungen erfüllt sind, auch eine ergiebige Elektricitätsquelle in Wirksamkeit tritt, an die man wunderbarer Weise bisher noch nicht gedacht hat, obwohl sie schon von Faraday auf experimentellem Wege zweifellos nachgewiesen ist. Dieselbe Elektricitätsquelle scheint es auch zu sein, welche die Erscheinungen der gewöhnlichen atmosphärischen Elektricität, wenigstens der Hauptsache nach, bedingt. Die Natur des behandelten Themas bringt es mit sich, dass die vorliegende Untersuchung zum Theil von meteorologischem, zum Theil von physikalischem Charakter ist; rein physikalisch ist nur der vierte Abschnitt. Wesentlich neue Thatsachen wird man wenig finden; neu dürfte aber die Verknüpfung mancher bisher vereinzelt dastehender Thatsachen nebst den daraus entspringenden Folgerungen sein.

Der Gedankengang ist in der Kürze folgender. Zuerst untersuche ich die Temperaturverhältnisse in grösseren Höhen der Atmosphäre, indem ich mich nur auf Beobachtungen von Luftfahrern stütze. Es zeigt sich, dass man auch im Sommer schon in verhältnissmässig geringer Höhe den Gefrierpunkt antrifft, und dass sich diese Höhe mit der Tageszeit sehr merklich ändert. Dann wird die Temperaturvertheilung bei gewitterhafter Wetterlage behandelt, ebenfalls zunächst auf Grund von Beobachtungen im Luftballon, sodann auf Grund von Beobachtungen in verschiedenen Höhen am Schwarzwald-Gebirge. Es stellt sich heraus,

dass die Temperatur an Gewittertagen fast immer schneller nach oben hin abnimmt als sonst.

Hierauf wende ich mich zur Betrachtung der Wolken, speciell der in grösseren Höhen befindlichen. Alle Wolken gruppiren sich in zwei Abtheilungen: Wasserwolken und Eiswolken. Dass die Cirruswolken aus Eiskrystallen bestehn, wird eingehend nachgewiesen durch Betrachtung der Höfe grosser Art, die in ihnen zu Stande kommen. Die Unterscheidung beider Arten von Wolken auf optischem Wege stellt sich als leicht ausführbar und sehr nützlich heraus.

Darauf wird zur Untersuchung der Natur der Wolken beim Ausbruch eines Gewitters geschritten. Die dabei am auffallendsten hervortretende Wolkenform führt zur Betrachtung der aufsteigenden Luftströme, deren Theorie nach Reyes Untersuchungen kurz entwickelt wird. Aus diesen Betrachtungen folgt, mit Rücksicht auf die vorhergehenden Auseinandersetzungen über die Temperaturabnahme nach oben (speciell bei Gewittern), dass beim Gewitter Wassertheilchen die Eisregion erreichen. Das so erschlossene Nebeneinanderbestehen von beiderlei Wolkenarten in der Höhe wird durch vielfache Beobachtungen als thatsächlich vorhanden erkannt. Es muss hinzugefügt werden, dass beiderlei Wolkenarten dabei natürlich in heftiger Bewegung sind.

Im folgenden Abschnitt weise ich sodann nach, dass die Reibung von Wasser- und Eistheilchen eine ergiebige Elektricitätsquelle ist, und gehe näher auf die experimentelle Begründung ein.

Im fünften Abschnitt wird der aus den vorhergehenden Erörterungen mit Nothwendigkeit folgende Schluss gezogen, dass die Reibung von Eis- und Wassertheilchen in der Höhe die wahre Quelle der Gewitter-Elektricität ist. Einige andere Theorieen werden kurz kritisirt.

Der letzte Abschnitt führt dann auch die gewöhnliche Luftelektricität auf ähnliche Vorgänge zurück.

Erster Abschnitt.

Abnahme der Temperatur mit zunehmender Höhe in der freien Atmosphäre.*)

Unsere Kenntniss von den Temperaturverhältnissen in den höheren Schichten der freien Atmosphäre beruht auf einer nicht geringen Zahl wissenschaftlicher Luftreisen. Das Hauptergebniss ist, dass in grossen Höhen auch im Sommer eine sehr niedrige Temperatur herrscht. Zugleich hat sich aber gezeigt, dass häufig warme und kalte Luftströme in wiederholtem Wechsel übereinanderfliessen. Auch hat man bemerkt, dass innerhalb der Wolken die Temperatur nach oben hin wesentlich langsamer abzunehmen pflegt als ausserhalb. Hiernach kann von einem völlig allgemein giltigen Gesetz der Temperaturabnahme mit zunehmender Höhe in der freien Atmosphäre nicht die Rede sein. Nur so viel steht fest, dass im Ganzen und Grossen die Temperatur nach oben hin abnimmt. Weiter kann man aber den Versuch machen, wenigstens für die durchschnittliche Abnahme angenäherte Zahlen zu gewinnen. Zwei solche Versuche liegen vor, und die leidlich gute Uebereinstimmung der beiden, aus verschiedenen Beobachtungen abgeleiteten Ergebnisse spricht für die Brauchbarkeit der letzteren. Die erste hierauf abzielende Untersuchung hat James Glaisher [1]) ausgeführt. Von 23, überwiegend in den wärmeren Monaten von ihm ausgeführten Luftreisen schliesst er 7, bei denen zu grosse Unregelmässigkeiten beobachtet worden, von der Berechnung aus. (Aus demselben Grunde empfiehlt es sich, die Ergebnisse einiger in den Wintermonaten und nicht über 1500 m. hinauf geführter Luftreisen, die er erst nach der Aufstellung der unten folgenden Haupttabelle unternahm, unberück-

*) Alle Temperaturangaben in dieser Schrift beziehen sich auf die hunderttheilige Skala, alle Höhenangaben auf Meter, wenn nicht ausdrücklich andere Einheiten angegeben sind.

sichtigt zu lassen.) Sodann sondert er seine Beobachtungen in solche bei bedecktem und solche bei klarem Himmel. So findet er z. B. als Mittel aller Temperaturabnahmen, die er bei bewölktem Himmel von 0 bis 1000 engl. Fuss Höhe beobachtet hat, 4°,5 F.; als Mittel der ebenso von 1000 bis 2000′ beobachteten Abnahmen 3°,6 F., u. s. f. Durch successive Addition dieser Zahlen gewinnt er eine neue Zahlenreihe, welche die durchschnittliche Abnahme von 0 bis 1000′, von 0 bis 2000′, von 0 bis 3000′ u. s. f. zeigt. Diese letztere Tabelle, enthaltend die beiden Zahlenreihen, welche für bedeckten, resp. klaren Himmel gelten — aber umgerechnet auf Meter und Grade der hunderttheiligen Skala —, soll wegen ihrer Wichtigkeit für die vorliegende Untersuchung hier vollständig mitgetheilt werden. Die Zahlen der zweiten und dritten Colonne geben also die Temperaturabnahme an, welche stattfindet beim Aufsteigen vom Meeresspiegel bis zu der Höhe, die in der ersten Colonne angegeben ist. Die Zahlen der vierten und fünften Colonne zeigen die in den verschiedenen Höhen stattfindenden Temperaturabnahmen bei 100 Meter Aufsteigung, und zwar bei bewölktem und bei klarem Himmel.

Aufstieg bis	Temperaturabnahme bei		Temperaturabnahme für 100 Meter Erhebung bei	
	bewölktem Himmel.	klarem Himmel.	bewölktem Himmel.	klarem Himmel.
engl. Fuss Meter	° C.	° C.	° C.	° C.
1000 = 305	2,50	3,44	0,82	1,13
2000 = 610	4,50	6,06	0,65	0,86
3000 = 914	6,56	8,17	0,68	0,69
4000 = 1219	8,44	10,00	0,62	0,60
5000 = 1524	10,28	11,61	0,60	0,53
6000 = 1829	12,06	13,06	0,59	0,48
7000 = 2134	13,56	14,44	0,49	0,45
8000 = 2438	14,89	15,94	0,44	0,49
9000 = 2743	16,11	17,33	0,40	0,46
10000 = 3048	17,33	18,67	0,40	0,44
11000 = 3353	18,56	19,78	0,40	0,36
12000 = 3658	19,78	21,06	0,40	0,42
13000 = 3962	21,00	22,28	0,40	0,40
14000 = 4267	22,28	23,39	0,41	0,36
15000 = 4572	23,39	24,33	0,36	0,31
16000 = 4877	24,56	25,56	0,38	0,40
17000 = 5182	25,22	26,61	0,22	0,34

Aufstieg bis		Temperaturabnahme bei		Temperaturabnahme für 100 Meter Erhebung bei	
		bewölktem Himmel.	klarem Himmel.	bewölktem Himmel.	klarem Himmel.
engl. Fuss	Meter	° C.	° C.	° C.	° C.
18000 =	5486	25,94	27,56	0,24	0,31
19000 =	5791	26,72	28,39	0,26	0,27
20000 =	6096	27,22	29,11	0,16	0,24
21000 =	6401	27,83	29,78	0,20	0,22
22000 =	6705	28,28	30,39	0,15	0,20
23000 =	7010	28,72	30,94	0,14	0,18
24000 =	7315		31,67		0,24
25000 =	7620		32,28		0,20
26000 =	7925		32,83		0,18
27000 =	8229		33,39		0,18
28000 =	8534		33,89		0,16
29000 =	8839		34,33		0,14
30000 =	9144		34,61		0,09

Die zweite auf denselben Gegenstand bezügliche Untersuchung verdankt man Flammarion, [2]) der auf Grund seiner Beobachtungen bei 10 Luftfahrten folgende Temperaturabnahmen angiebt:

Aufstieg bis	Himmel	
	wolkig	klar
m	° C.	° C.
500	3	4
1000	6	7
1500	9	10,5
2000	11,5	13
2500	14	15
3000	16	17
3500	18	19

Die Ergebnisse beider Beobachter sind zwar, wie bei den so wechselnden Zuständen der Atmosphäre nicht anders zu erwarten war, nicht in völliger Uebereinstimmung; es tritt namentlich hervor, dass Flammarion eine etwas langsamere Temperaturabnahme findet; aber beide lehren übereinstimmend, dass die Temperaturabnahme merklich schneller ist bei klarem Himmel als bei bewölktem. Sie ist ferner, nach Flammarions Aussage, an heissen Tagen schneller als an kalten (was mit dem vorigen Ergebniss eng zusammenhängt) und Abends schneller als Morgens.

Man könnte vielleicht argwöhnen, dass die schnellere Temperaturabnahme bei klarem Himmel auf Rechnung der vermehrten Ausstrahlung des Thermometers selbst zu setzen sei. Indessen war diese Fehlerquelle (bei Flammarions Beobachtungen vermuthlich, gewiss aber bei Glaishers Beobachtungen) dadurch möglichst ausgeschlossen, dass das Thermometer durch Metallschirme sorgfältig geschützt war. Auch wird aus den Erörterungen des dritten Abschnitts hervorgehen, dass die fragliche Thatsache theoretisch wohl verständlich ist.

Auf Grund der mitgetheilten Tabellen von Glaisher und Flammarion ist man nun im Stande, die für die folgende Untersuchung besonders wichtige Frage zu beantworten, wie hoch man sich an einem gegebenen Tage (in unseren Gegenden) erheben müsse, um — wenigstens mit Wahrscheinlichkeit — in die Eisregion zu gelangen. Beträgt z. B. an einem klaren Sommertage die Temperatur der untersten Luftschicht 20°, so muss nach Glaishers Tabelle bereits in der Höhe von 3400 Metern, nach Flammarion in etwa 3750 Metern, Gefriertemperatur herrschen; denn nach jenen Tabellen findet bei Aufsteigung um die angegebenen Höhen eine Temperaturabnahme von 20° statt. — Nun liegt die Gesammtheit derjenigen Punkte der Atmosphäre, in denen in einem gegebenen Augenblick die Temperatur 0° herrscht, im Allgemeinen in einer gewissen Fläche: „der Isothermfläche Null“, oder unter gewissen Umständen — wie die Theorie der aufsteigenden Luftströme lehrt — in einer Schicht von sehr mässiger Dicke; doch soll der Einfachheit halber immer nur von der Isothermfläche gesprochen werden. Und diese Fläche muss im Allgemeinen als horizontal oder auf grössere Strecken hin als nahezu parallel zur idealen Erdoberfläche vorausgesetzt werden. Mit Benutzung dieses Begriffs kann man das in unserem Beispiel gewonnene Ergebniss auch dahin aussprechen, dass unter den angenommenen Umständen die Meereshöhe der Isothermfläche Null etwa 3400 bis 3750 Meter betrage. Dieses Ergebniss findet sich in vortrefflicher Uebereinstimmung mit einer Reihe directer Beobachtungen; das erhellt aus der folgenden Zusammenstellung von Höhen, in denen acht verschiedene Luftfahrer bei 22 Fahrten den Eispunkt wirklich angetroffen haben. Alle Zahlen der Tabelle sind den (in der ersten Beilage in kürzestem Auszuge mitgetheilten) Beobachtungsreihen der Luftfahrer entnommen, theils unmittelbar, theils mit Hilfe einfacher

Interpolationen. Nur in zwei durch ein Fragezeichen gekennzeichneten Fällen liegen die beobachteten Temperaturen, zwischen denen interpolirt werden musste, so weit auseinander, dass die ermittelte Höhe der Isothermfläche Null nur als ganz rohe Annäherung gelten kann. Wenn bei derselben Fahrt mehrere Höhen der Isothermfläche Null angegeben sind, so ist die erste diejenige, welche beim Aufstieg, die letzte diejenige, welche beim Abstieg beobachtet wurde; nur bei der Fahrt am 9. October 1863 ergab sich die letzte Zahl ebenfalls beim weiteren Steigen. Ist nur eine einzige Höhenlage angegeben, so ist dieselbe beim Aufstieg beobachtet. In der letzten Colonne ist die Geschwindigkeit des Auf- oder Abstiegs in Metern pro Minute angegeben. Die Pfeile zeigen den Auf- resp. Abstieg an.

Beobachtete Höhen der Isothermfläche Null.

Datum.	Beobachter.	Tageszeit.	Meereshöhe.	Geschw. m pro Minute.
			m	
12. Januar 1864	Glaisher	2^h 34^m pm*)	1825	134 ↑
		3 56	1342	304 ↓
31. März 1863	„	4 30 pm	2315	134 ↑
		6 24	413	101 ↓
6. April 1864	„	4 19 pm	1184	115 ↑
15. „ 1868	Flammarion [3])	3 30 pm	1678 (?)	
15. „ 1875	Tissandier [4])	12 30 pm	4387—4700	
18. „ 1863	Glaisher	1 29 pm	3167	458 ↑
2. Mai 1875	Fonvielle [5])	2 30 pm	3019 (?)	
26. Juni 1863	Glaisher	1 16 pm	2810	250 ↑
		1 28	4941	59 ↑
		2 12	5002	111 ↓
30. „ 1884	Rodeck [6])	9 40 pm	< 2640	
17. Juli 1862	Glaisher	9 53 1/2 am	2451	26 ↑
		10 15	5155	92 ↑
		10 46	6113	91 ↑
		11 37 1/2	4353	1192 ↓
27. „ 1850	Barral u. Bixio [7])	4 20 pm	3660	248 ↑
		5 14	2185	133 ↓
17. August 1852	Welsh [8])	4 23 1/2 pm	4034	143 ↑
		5 1/2	3505	180 ↓
18. „ 1862	Glaisher	2 26 pm	4475	151 ↑
		3 33	4311	128 ↓
21. „ 1862	„	5 17 am	3141	76 ↑
		6 17	3421	59 ↓

*) pm = Nachmittag, am = Vormittag.

Datum.	Beobachter.	Tageszeit.	Meereshöhe	Geschw. m pro Minute.
			m	
26. August 1852	Welsh	5h 45m pm	3761	9 ↑
29. „ 1864	Glaisher	4 54 ½ pm	4293	49 ↑
		5 4	3623	223 ↓
5. September 1862	„	1 21 pm	3056	258 ↑
		2 17 ½	2957	179 ↓
16. „ 1804	Gay-Lussac[9])	10 0(?) am	5766	
		später . . .	5671	
29. „ 1863	Glaisher	8 2 am	1839	35 ↑
		10 10	2098	272 ↓
9. October 1863	„	4 39 pm	1742	68 ↑
		4 52 ½	1707	433 ↓
		5 50 ½	1883	67 ↑
21. „ 1852	Welsh	3 19 ½ pm	3292	76 ↑
		3 35	3255	125 ↓
10. November 1852	„	2 39 ½ pm	2632	143 ↑
30. December 1864	Glaisher[10])	2 ½ pm	700	

Die aus dieser Tabelle zu entnehmende Höhenlage der Isothermfläche Null im Juli und August schwankt (wenn von dem am 17. Juli 1862 sich mehrfach wiederholenden abnormen Auftreten der Temperatur 0° in grösseren Höhen abstrahirt wird) zwischen 2451 und 4475 m; das Mittel dieser beiden Grenzlagen ist 3463, also fast genau übereinstimmend mit der vorher aus Glaishers Tabelle der durchschnittlichen Temperaturabnahme abgeleiteten Höhe von 3400 m. Auch das Mittel aller 13 im Juli und August beim Auf- und Abstieg beobachteten Höhenlagen der Isothermfläche Null weicht nicht weit von dieser Zahl ab; es beträgt 3632 m, nähert sich also mehr der aus Flammarions Angaben der Temperaturabnahme abgeleiteten Zahl 3750.

Unsere Tabelle zeigt ferner — was selbstverständlich ist —, dass die fragliche Fläche in den kalten Monaten durchschnittlich viel tiefer liegt als in den warmen. Sodann bemerkt man, dass grosse Schwankungen ihrer Höhenlage in der gleichen Jahreszeit verschiedener Jahre stattfinden; man vergleiche z. B. die bei verschiedenen Fahrten im April gefundenen Höhen, ferner die im September.

Am interessantesten ist aber die zweifellos aus der Tabelle abzulesende Thatsache, dass die Lage der Isothermfläche Null im Laufe von 1 oder 2 Stunden meist sehr starken Veränderungen

unterliegt; sie wird beim Abstieg oft um Hunderte von Metern, ja bis 2000 m anders gefunden als beim Aufstieg.

Zunächst ist man freilich versucht, diese grossen Verschiedenheiten auf Rechnung der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen zu setzen, indem man etwa folgende Ueberlegung anstellt. Da jene Fläche beim Abstieg oft schneller passirt worden ist als beim Aufstieg, so muss die Trägheit des Thermometers sich geltend gemacht haben; das Instrument brachte seine in grösserer Höhe erlangte tiefe Temperatur mit herab und zeigte 0° an solchen Stellen, wo die Temperatur in Wahrheit schon höher war. Wirklich ist in 9 unter 14 Fällen die Isothermfläche Null beim Abstieg niedriger gefunden als beim Aufstieg. So plausibel diese Ueberlegung auch klingt, so ist sie doch nicht stichhaltig, wenn auch die Trägheit des Thermometers immerhin einen gewissen fälschenden Einfluss haben mag.

Sondert man nämlich die Fahrten in solche, welche Vormittags, und solche, welche Nachmittags ausgeführt sind, so stellt sich heraus, dass die ersteren ein anderes Ergebniss liefern als die letzteren. Bei 3 Vormittagsfahrten (17. Juli, 21. August, 29. September) wurde jene Fläche beim Abstieg in einer grösseren Höhe gefunden als beim Aufstieg; und am 17. Juli sogar trotz des ganz rapiden Abstürzens aus grosser Höhe; nur eine einzige Vormittagsfahrt (16. September) zeigt eine kleine Lagenänderung von entgegengesetztem Sinne. Unter 10 Nachmittagsfahrten dagegen sind 8, welche jene Fläche beim Abstieg tiefer liegend ergaben als beim Aufstieg (12. Januar, 31. März, 27. Juli, 17., 18. und 29. August, 5. September, 21. October), obgleich in 4 von diesen Fällen der Abstieg sogar langsamer erfolgte als der Aufstieg; und nur bei 2 Fahrten (26. Juni, 9 October) fand sich eine entgegengesetzte Lagenänderung. Von letzteren ist aber die vom 26. Juni nach Glaishers Bericht überhaupt unter ganz aussergewöhnlichen meteorologischen Umständen vor sich gegangen; zudem fand sie sehr bald nach der Mittagszeit statt.

Das beobachtete Steigen und Sinken der Isothermfläche Null erweist sich also augenscheinlich als verknüpft mit der zu- und abnehmenden Sonnenhöhe; und es erscheint naturgemäss, dasselbe mit den durch die Sonnenwärme bedingten auf- und absteigenden Luftströmen, oder besser gesagt, mit der Ausdehnung und Auflockerung der Luft durch die Sonnenwärme, in Zusammenhang zu bringen. Mit Rücksicht auf diese innere Wahrscheinlichkeit

des Resultats liegt also kein Grund vor, dasselbe für eine Folge mangelhafter Beobachtungen zu halten. Manche Unregelmässigkeiten der Erscheinung finden übrigens ihre Erklärung z. Th. wohl darin, dass jene Fläche nicht immer genau horizontal sein, sondern Erhöhungen und Vertiefungen besitzen wird. Weil nun die Auf- und Absteigung des Ballons keineswegs in derselben Verticalen erfolgt, so müssen solche Unregelmässigkeiten der Fläche sich als Störungen eines einfachen Gesetzes bemerklich machen. Unregelmässigkeiten müssen endlich auch durch die gewiss nicht unerheblichen Fehler in der Bestimmung der augenblicklichen Höhe des Ballons hervorgerufen werden.

Hiernach ist man berechtigt, als ein Ergebniss der Temperaturbeobachtungen bei Luftfahrten auszusprechen:

Die Isothermfläche Null steigt im Allgemeinen im Laufe des Vormittags, und zwar — wie es scheint — schneller mit der grösseren Annäherung an die Mittagszeit; dagegen sinkt sie im Laufe des Nachmittags, und zwar — wie es scheint — schneller mit der grösseren Entfernung von der Mittagszeit. Ihre Höhenlage kann sich schon in 1 bis 2 Stunden um 2000 Meter ändern. Der Uebergang aus dem Steigen in's Sinken erfolgt wohl nicht genau um die Mittagszeit, sondern vielleicht ein oder einige Stunden verspätet (vergl. die Fahrt vom 26. Juni), wohl wechselnd mit der Jahreszeit.

In den heissesten Sommermonaten befindet sie sich durchschnittlich nur in 3000 bis 4000 Meter Höhe, sinkt aber auch in dieser Zeit gelegentlich sogar bis gegen 2000 Meter Meereshöhe.

Ausser der allgemeinen Kenntniss von der Temperaturabnahme nach oben in der freien Atmosphäre wäre von besonderer Wichtigkeit die Kenntniss dieser Abnahme an Gewittertagen, und womöglich nahe vor dem Ausbruch eines Gewitters. Begreiflicher Weise liegen hierüber nur sehr wenige Beobachtungen vor, so dass die Ergebnisse dieses Theils der Untersuchung nur geringere Sicherheit beanspruchen können. Mir sind nur 3 Berichte von Luftfahrten bekannt geworden, welche einiges

Material für diese Untersuchung liefern (obgleich auch noch bei einigen anderen Fahrten Gewitter stattgefunden haben): Welshs Fahrt am 17. August 1852 nahe vor dem Ausbruch eines Gewitters, Flammarions Fahrt am 14. Juli 1868 während eines Gewitters, Glaishers Fahrt am 31. August 1863, mehrere Stunden nach einem Gewitter.*) Ich beginne mit der letzteren.

Glaisher[12]) stieg am 31. August 1863 Nachmittag 6^h 7^m in Newcastle auf. Daselbst hatte es Vormittag um 8^h gewittert und auch Nachmittag noch geregnet.**) Die Fahrt ging nicht in solche Höhen hinauf, dass der Eispunkt erreicht wurde; die niedrigste Temperatur 0,83 °C fand sich in 2301 m Höhe; von 2374 m bis 2449 m herrschte die Temperatur 1,11°. Man ist also für diese Fahrt nicht im Stande, die Höhe der Isothermfläche Null anzugeben. Aber man kann eine Vorstellung darüber gewinnen, ob die angetroffene niederste Temperatur etwa in ungewöhnlich grosser oder ungewöhnlich geringer Höhe angetroffen ist. Hierzu dient folgende Uebersicht aller derjenigen Temperaturen, welche bei anderen, in der heissesten Jahreszeit ausgeführten Luftreisen in der ungefähren Höhe von 2300 bis 2400 m angetroffen worden sind.

---

*) Obgleich Glaisher[11] auch bei der Fahrt vom 18. August 1862 in seinem Tagebuch dreimal „Donnerschläge" notirt, so ist es doch nach seinen erläuternden Bemerkungen durchaus unwahrscheinlich, dass damals ein Gewitter stattgefunden hat; denn Niemand auf der Erde hat etwas Derartiges bemerkt. Wohl aber ist gleichzeitig in Birmingham mit Kanonen geschossen worden, so dass sich die gehörten Donnerschläge wohl einfach als Kanonendonner herausstellen, zumal da vom Ballon aus auch keine solchen Wolken, von denen der Donner hätte ausgehen können, bemerkbar waren.

**) Unter den von Glaisher mitgetheilten meteorologischen Beobachtungen welche an demselben Tage an irdischen Stationen mit Rücksicht auf die Luftfahrt angestellt sind, finden sich bei Newcastle-on-Tyne folgende Angaben:

9^h am }
3 pm } Trübe. Donner mit schwerem Regen um 8 pm und Nachmittags.
6 „
9 „ Trübe.

Wenn schon aus den Beobachtungsstunden, neben denen sich die Gewitternotiz befindet, hervorgeht, dass in dieser Notiz nur durch einen Druckfehler 8 pm statt 8 am steht, so habe ich mir doch darüber noch Gewissheit verschafft. Herr Rob. Scott, Sekretär des meteorologischen Amts in London, hatte die Güte, mir aus Symons' Regenfall-Circular für August 1863 mitzutheilen, dass in North Shields (nahe bei Newcastle-on-Tyne) am 31. August von 4^h bis 8^h 30^m Vormittags ein Gewitter stattgefunden hat.

					m	°C.
26. Juni 1863	Glaisher	1^h	$15^1/_3{}^m$	pm	2690	2,22
17. Juli 1862	„	9	53	am	2432	0,28
27. „ 1850	Barral u. Bixio	5	12	pm	2452	— 1,
17. August 1852	Welsh	4	4	„	2429	9,89
18. „ 1862	Glaisher	1	15	„	2349	7,61
21. „ „	„	5	10	am	2380	3,06
26. „ 1852	Welsh	5	$6^1/_2$	pm	2415	5,28
29. „ 1864	Glaisher	4	27	„	2436	9,39
		5	14	„	2483	5,11
5. September 1862	„	1	$17^1/_2$	„	2309	4,17
		2	19	„	2682	1,22
31. August 1863	„	6	25	„	2301	0,83
		6	27—32	„	{2374 2449}	1,11

Diese Uebersicht lässt erkennen, dass bei keiner anderen an einem Augusttage ausgeführten Luftfahrt in Höhen von 2300 bis 2400 Meter auch nur annähernd so niedrige Temperaturen angetroffen sind, als bei der in Rede stehenden Fahrt. Berücksichtigt man noch die übrigen Fahrten von Ende Juni bis Anfang September, so sind unter sämmtlichen Hochsommerfahrten doch immer nur 2, nämlich die beiden Julifahrten, bei denen in dieser Höhe schon niedrigere Temperaturen gefunden worden sind. Von Wichtigkeit ist auch Glaishers Bemerkung über die Temperaturabnahme bei dieser Fahrt: „Die Temperaturabnahme innerhalb der ersten 200 Fuss von der Erde ist bei dieser Aufsteigung sehr bemerkenswerth, da bei keiner anderen Aufsteigung eine so rapide Abnahme gefunden worden ist.“

Die zweite in Betracht kommende Luftfahrt an einem Gewittertage ist diejenige Flammarions.[3]) Am 14. Juli 1868 Nachmittag 5^h 22^m stieg Flammarion bei bewölktem Himmel und frischem Winde von Paris auf. Die Temperatur war bei der Abfahrt 22°; der grösste Theil des Tages war unter Regenschauern vergangen. In 940 m Höhe war die Temperatur 10°. Als sich um 9^h 20^m Donner und Regen einstellte, wurde bis 1700 m aufgestiegen, wo es nicht mehr regnete. Um 4^h 26^m Morgens in einer Höhe von 2400 m betrug die Temperatur 0°. Eine Stunde später wurde in Solingen gelandet. Während der ganzen Fahrt war die Bewölkung stark, und es wurde viel Regen bemerkt. Am Abend dieses Tages (15. Juli) fand wieder ein Gewitter statt.

Die bei dieser Reise gefundene Höhe der Isothermfläche Null, nämlich 2400 m, ist so gering, wie sie bei keiner anderen Hochsommerfahrt, ausser bei der merkwürdigen Fahrt von Barral und Bixio angetroffen worden ist. Freilich darf dieser Umstand nicht ohne Weiteres auf Rechnung des gewitterlichen Wettercharakters gesetzt werden, denn es ist zu bedenken, dass auch keine andere Luftreise in so früher Morgenstunde ausgeführt worden ist, zu welcher Zeit die Isothermfläche Null wohl meistens besonders tief liegen wird.

Die letzte in Betracht kommende Fahrt ist die von Welsh[8]) vom 17. August 1852. Zum Schlusse seiner allgemeinen Beschreibung dieser Fahrt macht Welsh die Bemerkung, „dass etwa zwei Stunden nach der Herabkunft des Ballons ein heftiges Gewitter mit schwerem Regen eintrat, wovon schon vom Ballon aus einmal aus grosser Entfernung einige Symptome bemerkt worden waren.“ Zunächst interessirt die Höhenlage der Isothemrfläche 0^0 bei dieser Gelegenheit. Bei der Abfahrt um 3^h 52^m pm. war die Temperatur am Boden $21{,}78^0$, und während der Fahrt herrschte mässige Bewölkung. Auf Grund von Glaishers Tabelle über die Temperaturabnahme bei bewölktem Himmel hätte also zur Erreichung des Eispunkts eine Höhe von 4148 m zurückgelegt werden müssen. Nun traf man die Temperatur 0^0 um 4^h $23\frac{1}{2}^m$ schon im 4034 m, also ein wenig niedriger als zu erwarten war; beim Abstieg wurde die Temperatur 0^0 um 5^h $\frac{1}{2}^m$ in 3505 m Höhe gefunden; ihre mittlere Höhe während der Fahrt war also 3770 m. Weil sich nach diesen Angaben die Isothermfläche Null während 37 Minuten um 529 m gesenkt hatte, so ist zu vermuthen, dass sie weiter gegen Abend hin noch erheblich tiefer gesunken sein und bei Ausbruch des Gewitters um 7^h Abends wahrscheinlich ziemlich tief gelegen haben wird.

Zu einem sichreren Ergebniss als die Betrachtung der Isothermfläche Null führt die Untersuchung der bei dieser Fahrt vorhanden gewesenen Temperaturabnahme nach oben. Welsh hat die Ergebnisse seiner vier Luftfahrten eingehend discutirt. Um aus seinen Temperaturbeobachtungen bei den Fahrten, die 1 bis 2 Stunden währten, möglichst richtige Schlüsse abzuleiten, corrigirt er seine direct beobachteten Zahlen mit Rücksicht auf jene Temperaturänderung, welche während derselben Zeit an der Erdoberfläche stattgefunden hat. Sein Verfahren sieht er selbst als

unvollkommen an, doch „stand kein anderer Weg offen“; übrigens ist der Einfluss der Correction überhaupt nur gering. Sein für die vorliegende Frage wesentlichstes Resultat ist folgendes. Die bei jeder Fahrt aus der ganzen Beobachtungsreihe abgeleitete Höhendifferenz, welche durchschnittlich zurückgelegt werden muss, wenn die Temperatur um 1° F. sinken soll, betrug am

17. August	22. August	21. Oktober	10. November
322',9	382',0	436',5	400',6

Diese vier Zahlen würden nur dann ohne Weiteres vergleichbar sein, wenn sie aus gleich hoch geführten Luftreisen abgeleitet wären, weil man ja erfahrungsgemäss in grösseren Höhen der Atmosphäre eine grössere Strecke aufsteigen muss zur Erlangung der Temperatursenkung von 1° F. als in geringeren Höhen. Die ersten beiden Fahrten, welche für unseren Zweck die wichtigsten sind, gingen nun in der That fast gleich hoch (5907 m und 5822 m); für diese sind also die angegebenen Zahlen direct vergleichbar. Die dritte Fahrt ging nur bis 3853 m, hätte also eine wesentlich schnellere durchschnittliche Temperaturabnahme ergeben sollen; aber sie gerade zeigt bei Weitem die langsamste. Die letzte Fahrt endlich ging 1000 m höher als die erste, also durfte sie wohl eine merklich langsamere durchschnittliche Temperaturabnahme ergeben; dass letztere aber so viel langsamer erscheint als bei der ersten Fahrt, wird durch diesen Umstand nicht ausreichend erklärt. Welshs Zahlen enthalten also das Resultat, dass die am 17. August nahe vor Ausbruch des Gewitters ermittelte durchschnittliche Temperaturabnahme nach oben eine bei Weitem raschere ist als bei den drei anderen Fahrten.

Dies die Ergebnisse der 3 an Gewittertagen ausgeführten Luftreisen! Mit Rücksicht auf die geringe Anzahl von solchen Beobachtungen, sowie darauf, dass eine Vermehrung unserer Kenntnisse nach dieser Richtung hin nur ganz zufällig einmal eintreten könnte, schien es wenigstens einen Versuch zu lohnen, ob die nahe vor einem Gewitter vorhandene Temperaturvertheilung an irdischen Stationen von verschiedener Höhenlage irgend eine Besonderheit erkennen liesse. Freilich können diese Beobachtungen keine sehr massgebenden Resultate liefern, weil die Temperatur einer Bergstation sicher nicht als identisch mit derjenigen eines in freier Atmosphäre

gleich hoch liegenden Punktes angesehen werden kann. Auch erhält man auf diesem Wege die Temperaturabnahme nur in einer verhältnissmässig niedrigen Schicht der Atmosphäre.

Zu dieser Vergleichung schienen mir aus dem mir näher bekannten Badischen Beobachtungsnetz die beiden meteorologischen Stationen Freiburg im Breisgau und Höchenschwand auf dem Schwarzwald besonders geeignet, denn sie liegen nicht weit auseinander und haben einen Höhenunterschied von 719 m. Von beiden Stationen liegen vieljährige Beobachtungen vor, täglich angestellt zu den Terminen 7^h Vormittags, 2^h Nachmittags und 9^h Abends. Die beiden Jahre 1880 und 1881 wurden willkürlich herausgegriffen. Es wurden alle diejenigen Tage ausgesucht, an welchen von beiden Orten über Gewitter oder Wetterleuchten berichtet wird. Von allen diesen Fällen schienen aber für den vorliegenden Zweck nur solche brauchbar, in denen das gemeldete Gewitter mindestens für eine der beiden Stationen nicht sehr lange nach einem der 3 Beobachtungstermine stattfand, und natürlich nach demselben Termine für beide. Auf diese Art wurden also z. B. solche Gewitter von der Betrachtung ausgeschlossen, die erst um 2 oder 3 Uhr Nachts stattfanden, weil die letzte vor dem Ausbruch angestellte Temperaturbeobachtung (um 9^h Abends) schon als zu entlegen und zu wenig massgebend für den Zustand nahe vor dem Gewitterausbruch gelten musste. Ebenso wurden Gewitter, die an keiner der beiden Stationen früher als um 7 Uhr Abends auftraten, nicht berücksichtigt, weil die Mittagsbeobachtung (2^h) schon zu entlegen schien. Endlich wurden auch solche Fälle ausgeschlossen, wo während des Beobachtungstermins Regen fiel, weil dadurch ja eine ungewöhnliche Beeinflussung der Lufttemperatur hätte entstehen müssen. So blieben nur 17 Fälle übrig. In jedem dieser Fälle bildete ich den Unterschied zwischen denjenigen Temperaturen, welche an beiden Orten an dem zunächst vorhergegangenen Beobachtungstermin aufgezeichnet waren; diesen Unterschied verglich ich dann mit dem für jene Tageszeit (in jenem Monat) normalen Unterschiede. Um letzteren zu erhalten, bedurfte es der Kenntniss der für jede Station geltenden Normalwerthe für jene Stunde jenes Monats. Als solche Normalwerthe nahm ich die Mittel 10jähriger um jene Stunde in dem betreffenden Monat angestellter Beobachtungen (nämlich der Jahre 1874 bis 1883).

Das Ergebniss dieser kleinen Untersuchung ist, dass nur in

3 unter den 17 Fällen die Temperaturdifferenz beider Stationen nahe vor dem Ausbruch des Gewitters kleiner war als durchschnittlich zu den betreffenden Beobachtungsstunden in dem betreffenden Monat; in 14 Fällen aber grösser; und zwar beträgt dieser Ueberschuss in 9 Fällen mehr als $^{3}/_{4}{}^{0}$, *in 4 Fällen* $^{1}/_{3}$ *bis* $^{1}/_{2}{}^{0}$, *in 1 Fall nur* $^{7}/_{100}{}^{0}$. Nähere Einzelheiten darüber findet man in der zweiten Beilage.

Man erkennt, dass alle verschiedenen Wege, auf denen wir zur Kenntniss der Temperaturabnahme mit der Höhe an einem Gewittertage, und im Besonderen kurz vor einem Gewitter, zu gelangen gesucht haben, auf dasselbe Ergebniss hinzuführen scheinen; doch kann es natürlich trotzdem nicht als vollkommen bewiesen gelten. Ganz in demselben Sinne äussert sich übrigens schon Kämtz: „Eine wichtige Bedingung für die Ausbildung der Gewitter, besonders im Sommer, scheint eine schnelle Aenderung der Temperatur mit der Höhe zu sein, wie dies besonders aus den Erfahrungen von Brandes hervorgeht. Bei seinen Beobachtungen über die Strahlenbrechung fand er bei schwüler Gewitterluft oft eine so starke Refraction, dass nur ein starker Unterschied in der Temperatur der Luftschichten sie erklären konnte."

Wenn sonach die besonders schnelle Temperaturabnahme nach oben mit grosser Wahrscheinlichkeit als charakteristisch für die Wetterlage vor dem Ausbruch eines Gewitters gelten kann, so schliesst man mit derselben Wahrscheinlichkeit, *dass die Isothermfläche Null beim Ausbruch des Gewitters eine besonders niedrige Lage haben muss*, verglichen mit der Höhenlage, welche ihr zu der betreffenden Jahreszeit durchschnittlich zukommt.

Zweiter Abschnitt.

Wasserwolken und Eiswolken.

Nachdem im vorigen Abschnitt auf Grund directer Beobachtungen bei Luftfahrten nachgewiesen ist, dass selbst in der heissesten Jahreszeit durchschnittlich schon in 3 bis 4000 Metern Höhe über uns Gefriertemperatur herrscht, so muss man in Betreff der Wolken schliessen, dass im Allgemeinen nur diejenigen, welche in geringerer als dieser Höhe schweben, aus Theilchen flüssigen Wassers bestehen, jene aber, welche sich oberhalb der Isothermfläche 0° befinden, im Allgemeinen aus Eistheilchen gebildet sind. Dabei soll die Möglichkeit keineswegs ausgeschlossen werden, dass unter Umständen auch solche Wolken existiren können, die aus unter 0° abgekühlten und doch noch ungefrorenen Wassertheilchen bestehn; doch sind zunächst keine Thatsachen bekannt, die eine solche Beschaffenheit der über der Isothermfläche 0° befindlichen Wolken als eine besonders häufige oder gar als die gewöhnliche vorauszusetzen nöthigten.

Diese auch für den Sommer zutreffende Scheidung der Wolken in Wasserwolken und Eiswolken findet sich auch durch das allgemeine Aussehen derselben bestätigt, indem die hochschwebenden Eiswolken als Federwolken (Cirrus) erscheinen, von denen die niedrigeren Haufwolken (Cumulus) sich sehr bestimmt unterscheiden.

Die verschiedensten Luftfahrten, in der wärmeren Jahreszeit bei wolkigem Himmel unternommen, haben zuerst immer durch Haufwolken geführt; letztere wurden aber seltener, je höher man kam, und zu Häupten oder auch in der näheren Umgebung wurden schliesslich immer Cirrus beobachtet. Es scheint mir nicht überflüssig, einige Höhenangaben über die verschiedenen Wolkenarten

hier mitzutheilen, die den Berichten wissenschaftlicher Luftfahrer entnommen sind.

Tissandier[4]) befand sich am 4. October 1873 Mittags in 2600 m Höhe in einer sehr ausgedehnten Cumulusschicht, über der in einer zu 3600 m geschätzten Höhe eine dicke Schicht Cumulonimbus schwebte.

Glaisher kam den 17. Juli 1862 aufsteigend bei 2743 m aus einem dichten Cumulostratus heraus; beim Abstieg gelangte er in 3658 m wieder in eine Wolke.

Derselbe sah am 18. Aug. 1862 in 4359 m Höhe ein schneeweisses Wolkenmeer, Cirri noch höher schwebend.

Derselbe trat am 21. Aug. 1862 bei 1825 m in einen schönen Cumulus ein und fand später in 4337 m Strati scheinbar in gleicher Höhe mit dem Ballon.

Derselbe kam am 26. Juni 1863 bei 7010 m aus den Wolken, aber der Himmel war mit Cirrus und Stratus bedeckt.

Derselbe traf am 29. Sept. 1863 in 3901 m Stratus zum Theil in gleichem Niveau mit dem Ballon, zum Theil höher; bei 4231 m hatte er noch Wolken über sich.

Welsh traf am 17. August 1852 zunächst in 760 m und dann erst wieder in 3960 m einzelne Massen von lockerem Cumulus. Bei 5900 m stand eine dicke Masse von Cirrostratus in geringer Höhe über dem Ballon.

Derselbe trat am 21. October 1852 in 1130 m Höhe aus der oberen Fläche dichter Wolken heraus; die Sonne schien durch dünne Cirri in grosser Höhe.

Flammarion,[13]) der übrigens nur die beiden Wolkenarten Cumulostratus und Cirrus unterschieden wissen will, sagt: „Die Cumulostratus sind in einer mittleren Höhe von 1000 bis 1500 m. Man trifft sie unterhalb wie oberhalb dieser Grenzen. Die Cirrus sind nicht niedriger als fünfmal die Mittelhöhe der vorigen.“ Ferner: „Bei 4000 m verliert der Himmel der Cirrus seine Concavität, und der der Cumulus (N. B. den man unter sich sieht) höhlt sich aus. Ebenso erscheint die Erdoberfläche concav.“

Aus diesem Verschwinden der Concavität des Cirrushimmels geht offenbar hervor, dass man sich bei 4000 m schon ungefähr in gleicher Höhe mit den Cirruswolken befindet.

In befriedigender Uebereinstimmung mit diesen Angaben befinden sich die Ergebnisse der Messungen von Wolkenhöhen, die vom Erdboden aus angestellt sind. Kämtz[14]) findet als Mittel

seiner im Juli und August 1830 angestellten Messungen, dass die Cumuli zwischen 9^h Vormittags und 6^h Nachmittags sich in Höhen zwischen 3000 und 10000 Fuss bewegen; und dass die Höhe der Wolken vom Morgen bis einige Zeit nach dem Maximum der täglichen Wärme zu wachsen und hierauf wieder abzunehmen scheint. Hierbei erinnere man sich der im ersten Abschnitt nachgewiesenen täglichen Hebung und Senkung der Isothermfläche Null. Die Höhe der wenigen Cirri, die er beobachten konnte, schwankte zwischen 10000 und 24000 Fuss. Nur zweimal gelang es ihm, die Höhe eines Cirrostratus zu messen, in dem einen Fall betrug sie 11000, in dem zweiten Falle an demselben Tage 10500 Fuss.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass auch nach diesen Beobachtungen die untere Grenze der Cirri (10000 Fuss) mit der oberen Grenze der Cumuli zusammenfällt. Diese Grenze ist eben nichts Anderes als die Isothermfläche Null; und ihre hier ermittelte Höhenlage stimmt gut mit der früher (für die wärmeren Monate unserer Breiten) ermittelten überein. Doch ist die Grenze beider Wolkenregionen nicht eine absolute. Vettin[15]), der als niedrigste Höhe des Cirrus 9000 Fuss ermittelt hat, sagt vom Cumulus: Er findet sich in allen Höhen; er steigt selbst über den Cirrus; die höchst gemessene Höhe betrug 15000 Fuss. Auch Ch. Ritter[16]) fand durch Winkelmessung mit dem Sextanten, dass die Höhe von Cumulussäulen, die auf Bergen in bekannter Entfernung aufruhten, in einigen Fällen 6—9000 m betrug, während die Basis in 1000 bis 1600 m Höhe war.

Nach den Ermittelungen des ersten Abschnitts über die Höhenlage der Isothermfläche Null kann es nicht Wunder nehmen, dass bei mehreren im Hochsommer ausgeführten Luftfahrten in der Höhe sogar Schnee angetroffen worden ist. Darüber finden sich folgende Angaben:

Am 26. Juni 1863 stieg Glaisher um 1^h Mittags bei starkem WSW-Wind und sehr bewölktem Himmel auf. Durch abwechselnde Schichten von Nebel und feinem Regen gelangte er höher als 7000 m, ohne noch das Gewölk überschritten zu haben. Beim Abstieg traf er in 4327 m auf Schnee und gerieth bei 4235 m in einen Schneesturm. Bis unter 3300 m herab war die Luft voll Schneekrystalle.

Am 4. Juli 1875 Abends nach 6^h traf W. de Fonvielle[17]) in

3450 m Höhe grosse Eisnadeln und feine Schneeflöckchen; in 3550 m überzog sich die Flagge mit dichtem Reif, und das an dem Tauwerk ablaufende Wasser veranlasste die Bildung langer Eiszapfen. Bei 2880 m hörte das Schneien auf und es begann zu regnen.

Am 27. Juli 1850 stiegen Barral und Bixio[7]) um 4^h Nachmittags bei ganz bedecktem Himmel auf, nachdem es stark geregnet hatte. Oberhalb 6300 m fielen feine Eisnadeln, beim Aufschlagen auf das offene Notizbuch ein Knistern verursachend. Beim Abstieg wurden in 4500 m wieder kleine Eisnadeln getroffen.

Am 17. August 1850 stieg Welsh[8]) gegen 4^h Nachmittag bei starkem Südwind und ziemlich bewölktem Himmel auf. In 5900 m Höhe stand, in scheinbar geringer Höhe über dem Ballon, eine dicke Wolkenmasse, welche wahrscheinlich der von der Erde aus beobachtete Cirrostratus war. Um diese Zeit (4^h 46^m pm.) fielen einige kleine sternförmige Schneekrystalle (1 mm Durchmesser) auf die Reisenden.

Eiswolken und Wasserwolken verrathen die Verschiedenheit ihrer inneren Natur noch auf eine ganz andere Art als durch die allgemeine Verschiedenheit ihres Aussehens als Feder- und Haufwolken, und auch ohne dass die unmittelbare Untersuchung der constituirenden Theilchen in der Nähe ausführbar ist; nämlich durch die von ihnen veranlasste Erscheinung der Höfe um Sonne oder Mond. Es giebt bekanntlich zwei Arten von Höfen, welche Fraunhofer[18]) als Höfe grosser Art und Höfe kleiner Art unterscheidet. Die heutige Meteorologie bezeichnet nach Galles[19]) Vorgang die Höfe grosser Art als Ringe, die Höfe kleiner Art schlechtweg als Höfe. Die Ringe haben einen Halbmesser von etwa 22°, ihr innerer Rand ist mehr oder weniger deutlich roth gefärbt; die Höfe aber haben viel kleinere Halbmesser (von nur 1° oder 2°, selten bis 6°), ihr innerer Rand ist blass bläulich, der äussere röthlich, bisweilen mit deutlicher Wiederholung der Farbenfolge.

Wir betrachten zuerst die Ringe. Diese Erscheinung findet ihre vollständig befriedigende Erklärung nur durch die Annahme der Brechung in Eisprismen, deren brechender Winkel 60° ist, wie zuerst Mariotte angegeben hat und später Fraunhofer, Galle und Bravais[20]) eingehend nachgewiesen haben.

Verfolgt man den Durchgang eines in beliebiger Richtung auffallenden Bündels paralleler Lichtstrahlen durch ein optisches

Prisma, so findet man durch einfache Rechnung, dass das einfallende Bündel eine ganz bestimmte Lage haben muss, wenn die Strahlen des austretenden Bündels am dichtesten zusammengehalten werden und somit einem auffangenden Auge in grösster Intensität erscheinen sollen; es ist dann der Fall, wenn der Durchgang durch das Prisma symmetrisch erfolgt. Bei solchem Durchgang erleiden nämlich die Strahlen die geringste Ablenkung von der ursprünglichen Richtung, uud mit dieser Minimalablenkung hängt die Zusammenhaltung der Strahlen, oder ihre geringe Divergenz, zusammen.

Befinden sich nun, bei fest gegebener Lage der Lichtquelle und des Auges, sehr viele, untereinander gleichartige Prismen in allen möglichen Stellungen in dem Raume zwischen Lichtquelle und Auge, und zwar nicht etwa nur auf der Verbindungslinie beider, sondern in allen möglichen seitlichen Richtungen, so zeigen alle solche Strahlen, die durch ganz beliebig gelegene Prismen hindurchgegangen sind, keine vorwiegende Helligkeit; nur jene Strahlen, die durch so gelegene Prismen gingen, dass der Durchgang symmetrisch erfolgte, zeichnen sich für das auffangende Auge durch besondere Helligkeit aus. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn gleichartig gebildete Eisprismen sich in der Luft befinden (jedoch nicht in solcher Menge, dass die Durchsichtigkeit der Luft allzusehr beeinträchtigt wird), in einem ganz bestimmten Winkelabstand von der Sonne oder dem Monde vorwiegende Helligkeit auftreten muss, d. h. dass man einen Lichtring wahrnehmen muss. So einfach wäre die Erscheinung, wenn die Lichtquellen einfarbige Strahlen aussendeten. Nun aber ist das Licht der Sonne und des Mondes weiss. Wegen der mit der Brechung weissen Lichts nothwendig verknüpften Farbenzerstreuung muss also der Ring farbig erscheinen, und dabei muss das am schwächsten gebrochene rothe Licht den geringsten Winkelabstand von der Lichtquelle haben. Diese Ueberlegung erklärt das Auftreten des inneren rothen Randes bei allen gut entwickelten Höfen grosser Art. Die Verwaschenheit der übrigen Farben folgt daraus, dass die Lichtquelle nicht punktförmig ist; denn die von einem Punkte der Lichtquelle erzeugten verschiedenfarbigen Ringe müssen sich mit den von den anderen leuchtenden Punkten erzeugten Ringen vielfach so überdecken, dass verschiedene Farben zusammenfallen.

Die Richtigkeit dieser Theorie der Lichtringe wird bewiesen durch die Uebereinstimmung der beobachteten Halbmesser von

Lichtringen mit demjenigen Winkelabstand, der sich aus der Theorie auf dem Wege der Rechnung ergiebt. Die Eiskrystalle gehören dem hexagonalen System an; ihre Begrenzung wird der Hauptsache nach von den sechs Flächen eines regelmässigen sechsseitigen Prismas gebildet, so dass je 2 benachbarte Seiten einen Winkel von 120° einschliessen. Die Brechungsquotienten des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahls im Eise haben nach Reusch [21]) folgende Werthe:

	ordentl. Strahl	ausserordentl. Strahl
Roth	1,3060	1,3073
Grün	1,3120	1,3136
Violett	1,317	1,321

Diese Zahlen stimmen sehr gut mit den früher von Bravais für mehrere Farben angegebenen Brechungsquotienten überein.

Da die beiden Brechungsquotienten nicht viel voneinander abweichen, kann man für den vorliegenden Zweck von ihrem Unterschiede überhaupt absehen und für eine mittlere Farbe den Brechungsquotienten = 1,31 setzen. Nun übersieht man ohne Schwierigkeit, dass in einem optischen Prisma, dessen Brechungsquotient diesen Werth hat, und dessen brechender Winkel = 120° ist, der symmetrische Durchgang überhaupt nicht zu Stande kommen kann; denn der symmetrisch durchgehende Strahl müsste im Innern des Prismas einen Winkel von 60° mit dem Einfallsloth bilden, und zu einem solchen Winkel giebt es — beim Brechungsquotienten 1,31 — keinen reellen Einfallswinkel. Aber die abwechselnden Flächen des sechsseitigen Eisprismas schliessen nur Winkel von 60° miteinander ein, und für ein solches optisches Prisma aus Eis ist der symmetrische Durchgang nicht mehr unmöglich. Nun kann das einzelne sechsseitige Eisprisma, wie man unmittelbar sieht, aufgefasst werden als bestehend aus zwei regulär dreiseitigen, aber um 60° gegeneinander gedrehten Prismen mit derselben Hauptaxe. „In Folge dieses Umstandes müssen — wie Fraunhofer bemerkt — zwei Mal so viel der unregelmässig liegenden Krystalle dem Lichte eine vortheilhafte Seite darbieten als bei dreiseitigen Prismen.“

Nun berechnet sich für ein Prisma von 60° mit dem Brechungsquotienten 1,31 das Minimum der Ablenkung — d. i. nichts anderes als der Halbmesser des Lichtringes — zu 21° 50′. So bei einer punktförmigen Lichtquelle. Hat aber die Lichtquelle die Gestalt einer Kreisscheibe, wie es bei Sonne und Mond scheinbar

der Fall ist, so erzeugt jeder Punkt seinen eigenen Lichtkreis von 21° 50′; die Gesammtheit aller dieser Kreise wird eingehüllt von zwei concentrischen Kreisen, welche also den inneren und äusseren Rand der ganzen Erscheinung bilden. Der mitten zwischen diesen beiden verlaufende Kreis ist der durch das Centrum der leuchtenden Scheibe erzeugte.

Weil nun der durchschnittliche Werth des scheinbaren Durchmessers der Sonne 32′, des Mondes etwa 31′ beträgt, so erhält man den Halbmesser des inneren Randes der Erscheinung dadurch, dass man den eben berechneten Werth noch um etwa 16′ verkleinert, wodurch sich 21° 34′ ergiebt, ebenso den des äusseren Randes durch Vermehrung um 16′, also = 22° 06′. Mit diesen berechneten Werthen stimmen nun die beobachteten gut überein. Die zuverlässigsten älteren Beobachtungen geben nach Kämtz den Ringhalbmesser im Mittel = 21° 59,5′, also nur $9\frac{1}{2}$′ abweichend von dem berechneten Radius der Mittellinie des Ringes. Der innere Rand des Ringes erscheint stets weit schärfer als der äussere, daher sind viele auf den ersteren bezügliche Messungen angestellt; z. B. fand Humboldt 21° 33′, Brandes 21° 30′. Einer der eifrigsten und zuverlässigsten Beobachter dieser Erscheinung, Herr J. G. Galle, findet als Mittel von 46 Messungen an M o n d r i n g e n den Halbmesser des inneren röthlichen Randes = 21° 34,47′ ± 1,65′, also übereinstimmend mit dem berechneten Werthe; als Mittel von 83 seiner Messungen an S o n n e n r i n g e n findet man 21° 41,8′, und aus der Beobachtung von Nebensonnen leitet er den Werth 21° 53,94′ ab. Dass diese zwei letzteren Zahlen etwas grösser sind als die vorigen, erklärt sich möglicher Weise daraus, dass der Sonnenglanz den Beobachter einigermassen geblendet und dadurch minder fähig gemacht hat, wirklich auf den Innenrand einzustellen als vielmehr auf einen der Mittellinie näheren, lichtstärkeren Theil. Uebrigens geben auch die von Arago[22]) mitgetheilten Bérardschen Messungen des Halbmessers des Innenrandes den merklich zu grossen Mittelwerth 22° 25′. Ist vielleicht bei weit tieferen Temperaturen der Brechungsquotient des Eises so viel grösser, dass eine merkliche Erweiterung der Ringe dadurch zu Stande kommt?

Bei der Vergleichung der beobachteten und berechneten Ringhalbmesser ist bis jetzt vorausgesetzt, dass nur die lichtstärkste Spectralfarbe, Gelb, mit dem Brechungsquotienten 1,31 die Erscheinung bestimme. Das wird in den weitaus meisten

Fällen auch zutreffen, namentlich immer dann, wenn der Ring matt und ohne hervortretend rothe Färbung des Innenrandes erscheint. Ist der letztere aber deutlich roth gefärbt, so muss bei der Brechung der Brechungsquotient des Eises für rothes Licht = 1,307 angewandt werden, wodurch man als Halbmesser des durch eine punktförmige Lichtquelle erzeugten Kreises 21° 36′, also als Halbmesser des Innenrandes der ganzen Erscheinung 21° 20′ erhält. In der That haben einzelne Messungen auch so kleine Werthe ergeben.

Zu dieser quantitativen Bestätigung der Theorie der Höfe grosser Art gesellt sich nun noch ein weiteres wichtiges Beweismoment. Durch Brechung in einem einfach brechenden (isotropen) Körper wird bekanntlich natürliches Licht immer in solches verwandelt, das zu einem kleinen Theil polarisirt ist, und zwar senkrecht zur Einfallsebene. Beständen also die Eisprismen aus isotroper Substanz, so müsste das Licht der durch Brechung in ihnen erzeugten grossen Höfe in der angegebenen Art theilweise polarisirt sein. Ganz dasselbe muss aber auch stattfinden, wie man leicht übersieht, wenn die Prismen aus doppelbrechender Substanz bestehen;*) und die Eiskrystalle sind ja in Wahrheit doppelbrechend. In der That ist das Licht der Mond- und Sonnenringe, wie Arago zuerst beobachtet hat, „durch Brechung polarisirt“.

Nach alledem unterliegt es keinem Zweifel, dass die Ringe um Sonne und Mond der Brechung des Lichts in Eiskrystallen, welche in der Luft schweben, ihre Entstehung verdanken. Einen Beweis dafür liefern auch die Beobachtungen, welche A. E. Nordenskjöld [23]) in den winterlichen Eisnebeln Spitzbergens 1872/73 Tage lang an merkwürdigen Sonnenhöfen gemacht hat. Der Ring von circa 22° erschien oft birnförmig mit abwärts gekehrter Spitze und war von mannigfaltigen anderen Bogen begleitet. Aber seine Stellung war nicht dauernd aufrecht, sondern die ihn symmetrisch

---

*) Um sich hiervon auf einfache Weise zu überzeugen, beachte man, dass im vorliegenden Fall die Polarisationsebene des ungewöhnlichen Strahls mit der Einfallsebene zusammenfällt, die des gewöhnlichen Strahls senkrecht auf ihr steht, und dass man ja den auffallenden natürlichen Strahl als aus zwei gleichen senkrecht aufeinander polarisirten Antheilen mit den genannten Polarisationsebenen anzusehen hat. Indem nun in erster Annäherung von der Verschiedenheit der Brechungsquotienten beider Strahlen abgesehen werden kann, so erlangt man dasselbe Resultat wie für eine isotrope Substanz.

theilende Ebene „oscillirte oft in kurzer Zeit und, wie ich glaube, mit dem Winde, der wahrscheinlich einen grossen Einfluss auf die Stellung der Eisnadeln hatte, bald nach rechts, bald nach links". Nordenskjöld findet die Ursache der Verschiedenheit der von ihm gesehenen Höfe gegenüber den sonst beschriebenen darin, dass die mit Eisnadeln erfüllte Luftschicht dicht auf dem Erdboden lag, über den der Eisstaub von heftigen Winden hinweggefegt wurde.

Nun ist die Erscheinung der Ringe keineswegs selten; sie ist vielmehr — wenn auch oft nur in Andeutungen — recht gewöhnlich, was besonders Kämtz als einer der eifrigsten Beobachter derselben bezeugt. Er sagt:[14]) „Die Cirri bestehen aus Schneeflocken, wie es das fast beständige Erscheinen von Höfen (grosser Art) in ihnen mehr als wahrscheinlich macht."*) Galle hat im Lauf von 19 Monaten, darunter auch sehr oft in allen Sommermonaten, nicht weniger als 78 Ringe und ungefähr ebensoviel complicirtere, ebenfalls auf der Anwesenheit von Eiskrystallen beruhende Erscheinungen, wie Nebensonnen u. dergl., beobachtet.

Viel bekannter und häufiger sind die Höfe kleiner Art; dieselben gehören, wie Fraunhofers Untersuchungen ausser allen Zweifel gestellt haben, zu den Beugungserscheinungen, und entstehen beim Durchgange des Lichts durch die Zwischenräume zwischen sehr vielen kleinen Kügelchen von gleicher Grösse. Je kleiner die Kügelchen, um so grösser ist der Halbmesser der Lichtkreise. Bestäubt man eine Glasplatte mit einem sehr gleichmässigen und feinkörnigen Pulver, wie Lykopodium oder sogen. Hirschbrunst, und betrachtet durch dieselbe eine nicht zu nahe aufgestellte Flamme, so sieht man letztere von einem Farbenhofe (kleiner Art) umgeben. Dieselbe Wahrnehmung kann man machen, wenn man von der Strasse her durch eine gleichmässig (aber noch fein) beschlagene Fensterscheibe eines heissen, mit vielen Personen gefüllten Locals nach einer innen befindlichen Lichtflamme sieht. Und ganz dieselbe Erscheinung rufen dünne Wolkenschleier hervor, welche aus kugelförmigen Wassertheilchen von gleicher Grösse gebildet sind.

Die Bedingungen für das Hervortreten der einen oder der anderen Art von Höfen sind also grundverschieden; und dadurch

---

*) Um Irrthümern vorzubeugen, sei erwähnt, dass Kämtz die Höfe grosser Art schlechtweg „Höfe" nennt, die Höfe kleiner Art aber Lichtkränze.

erlangt die Beobachtung der Höfe eine hohe Bedeutung für die Meteorologie, eine Bedeutung, auf welche Kämtz nachdrücklich und wiederholt hingewiesen hat. Er sagt: „Wofern die Wolken nicht so dicht sind, dass die von der Sonne kommenden Strahlen nicht mehr durch sie hindurchzudringen vermögen, zeigen alle Wolken, mit Ausnahme der Cirri und weit ausgedehnten Cirrostrati von geringer Dicke, Spuren von Lichtkränzen (Höfen kleiner Art). Ferner: „Die Färbung des Himmels (wenn sich Höfe grosser Art zeigen) ist ähnlich derjenigen, welche wir häufig bei Lichtkränzen wahrnehmen. Ein wichtiger Unterschied zwischen der Bewölkung in beiden Fällen aber ist folgender: Lichtkränze (d. h. Höfe kleiner Art) gehören dem Cumulus, Höfe (grosser Art) bilden sich im Cirrus." Ferner: „Während jeder Cumulus Spuren eines Lichtkranzes (Hofes kleiner Art) zeigt, lassen sich in jedem Cirrus Spuren eines Hofes (grosser Art) erkennen. Ziehen Cirri in der Nähe der Sonne oder des Mondes vorbei, so sieht man schon häufig mit blossem Auge in ihnen eine ausgezeichnet helle Stelle, deren Abstand etwa 22° vom leuchtenden Körper beträgt, noch häufiger aber erkennt man diese vermittelst des geschwärzten Spiegels. Allerdings geschieht es öfter, dass man keine Spur eines Hofes (grosser Art) in ihnen wahrnimmt, aber man wiederhole die Beobachtung einige Zeit später und in verschiedenen Stellungen der Wolke gegen die Sonne, so wird man ohne Ausnahme den Hof erkennen. Nur dann, wenn etwa isolirte Fasern des Cumulus ein Ansehn haben, welches dem der Cirri gleicht, findet man keine Spur eines Hofes (grosser Art), dann aber sieht man den Lichtkranz (Hof kleiner Art), und so giebt uns das optische Verhalten der Wolken die nöthigen Charaktere, um ähnlich scheinende Bildungen zu unterscheiden."

Die Wichtigkeit dieses Unterscheidungsmittels für beiderlei Wolkenarten wird im folgenden Abschnitt sogleich hervortreten.

Dritter Abschnitt.

Beschaffenheit der Wolken beim Ausbruch eines Gewitters.

Man muss zwei Classen von Gewittern unterscheiden, nämlich Gewitter von localer Natur, und solche, die einem allgemeinen Wetterumschlag vorangehn oder ihn begleiten. Beide werden wohl auch als Wärmegewitter und Wirbelgewitter unterschieden. Die localen Gewitter, zu denen die meisten Sommergewitter gehören, sind verhältnissmässig am genauesten studirt; daher sollen sie zunächst vorzugsweise in's Auge gefasst werden. Jeder kennt von schwülen Sommerabenden her das Aussehn entfernter Gewitterwolken: es sind echte Haufwolken (Cumuli), nämlich hoch in den Himmel aufsteigende Wolkensäulen, die wie riesige Baumwollenmassen erscheinen, und die von Blitzen durchzuckt werden. Ein aufmerksamer Beobachter dieser Formen, J. Silbermann[24]), zieht aus seinen mehr als 20jährigen Beobachtungen von Gewitterwolken das Resultat, dass sie sich immer aus einer Anhäufung von Cumulostratus bilden. Aus dieser Vereinigung getrennter Wolken entstehe immer „eine Wolke in Form eines Champignons, ein von oben nach unten eingedrückter Kopf, der auf einem dicken Stiel sitzt. Fast immer gehen die Blitze aus der Mitte des Kopfes hervor.“ In dieser charakteristischen Form der Wolken bei localen Gewittern ist der aufsteigende Luftstrom unverkennbar. Jene Cumulussäule ist ja nichts Anderes als der aufsteigende Luftstrom selbst, der seinen Weg durch Condensation des vorher unsichtbar gewesenen Wasserdampfs sichtbar am Himmel hinzeichnet. Das ist jetzt allgemein anerkannt. In diesem Sinne äussert sich z. B. Mohn[25]); ebenso in besonders eingehender Weise Gerland[26]); ebenso noch jüngst Hoppe[27]).

Dritter Abschnitt.

›eschaffenheit der Wolken beim Ausbruch eines Gewitters.

Man muss zwei Classen von Gewittern unterscheiden, nämlich itter von localer Natur, und solche, die einem allgemeinen terumschlag vorangehn oder ihn begleiten. Beide werden auch als Wärmegewitter und Wirbelgewitter unter-·den. Die localen Gewitter, zu denen die meisten Sommer-tter gehören, sind verhältnissmässig am genauesten studirt; r sollen sie zunächst vorzugsweise in's Auge gefasst werden. r kennt von schwülen Sommerabenden her das Aussehn ent-er Gewitterwolken: es sind echte Haufwolken (Cumuli), ich hoch in den Himmel aufsteigende Wolkensäulen, die wie ;e Baumwollenmassen erscheinen, und die von Blitzen durchzuckt en. Ein aufmerksamer Beobachter dieser Formen, J. Silber-ı [24]), zieht aus seinen mehr als 20jährigen Beobachtungen ‑ewitterwolken das Resultat, dass sie sich immer aus einer ıufung von Cumulostratus bilden. Aus dieser Vereinigung nnter Wolken entstehe immer „eine Wolke in Form s Champignons, ein von oben nach unten einge-;kter Kopf, der auf einem dicken Stiel sitzt. Fast r gehen die Blitze aus der Mitte des Kopfes hervor.“ In · charakteristischen Form der Wolken bei localen Gewittern r aufsteigende Luftstrom unverkennbar. Jene Cumulussäule nichts Anderes als der aufsteigende Luftstrom selbst, der ı Weg durch Condensation des vorher unsichtbar gewesenen erdampfs sichtbar am Himmel hinzeichnet. Das ist jetzt nein anerkannt. In diesem Sinne äussert sich z. B. Mohn [25]); o in besonders eingehender Weise Gerland [26]); ebenso noch ; Hoppe [27]).

nados und Wirbelstürme. Wenn wir nun die localen Gewitter mit Recht als durch aufsteigende Luftströme bedingt ansehn, so werden wir erwarten dürfen, die erstgenannten Erscheinungen häufig mit Gewittererscheinungen verknüpft zu sehn. Hierüber sagt Reye: „Elektrische Erscheinungen begleiten vielfach die Wettersäulen; so waren 41 von Peltiers 116 Tromben von Blitz, Donner oder Lichterscheinungen begleitet, bei 14 derselben fiel Schnee oder Hagel.“ Ferner: „Die Tornados (der Vereinigten Staaten) sind regelmässig von Blitz und Regen begleitet; nicht selten entwickeln sich die Tornados aus Gewittern, und häufig hagelt es während ihres Auftretens.“ Endlich: „Dichte Wolken und starke Regengüsse sind ständige Begleiter der Wirbelstürme, meistens auch Donner und Blitze.

Wenn die Gewitter der ersten Classe — wie wir aus der Gestalt der Gewitterwolken erschlossen haben, und wie auch aus allen Begleiterscheinungen hervorgeht — durch aufsteigende feuchte Luftströme bedingt sind, so lässt sich daraus auch ein wichtiger Schluss auf die Beschaffenheit der höheren Wolken bei solchen Gewittern ziehn. Im aufsteigenden Strome gesättigter Luft ist, wie auseinandergesetzt wurde, die Temperaturabnahme eine besonders langsame wegen der bei der Condensation frei werdenden Wärme. In der That lehrt die Hann'sche Tabelle, dass diese Abnahme in den unteren Schichten bis zu etwa 1900 Meter hinauf (wenn man von Temperaturen unter 0° als hier noch nicht in Betracht kommend absieht) im Allgemeinen merklich langsamer ist als jene, welche Glaisher durchschnittlich bei seinen Luftfahrten wirklich angetroffen hat. Erst in grösseren Höhen kehrt sich das Verhältniss um: hier erweist sich die beobachtete Temperaturabnahme durchschnittlich langsamer, als sie im feuchten aufsteigenden Strome stattfinden würde, so dass ein solcher Strom von hier an zu erlahmen beginnen muss. So wäre es, wenn die durchschnittlich beobachtete Temperaturvertheilung herrschte. Nun lehren aber die vorangegangenen Betrachtungen über den labilen Gleichgewichtszustand der Luft, dass aufsteigende Ströme um so leichter entstehen, je schneller die Temperatur der Atmosphäre nach oben hin abnimmt. Wenn daher irgendwo ein aufsteigender Strom vorhanden ist, so darf man im Allgemeinen mit Recht voraussetzen, dass ausserhalb desselben eine besonders schnelle Temperaturabnahme nach oben hin stattfinden wird. Hiermit stimmt das am Schluss des ersten Abschnitts

aus Beobachtungen abgeleitete Ergebniss vorzüglich überein, demzufolge gerade die besonders schnelle Temperaturabnahme mit grosser Wahrscheinlichkeit als charakteristisch für die Wetterlage vor dem Ausbruch eines Gewitters anzusehen ist. Unter diesen Umständen wird also der Strom wesentlich höher steigen müssen; und leicht wird er die Höhe der Isothermfläche Null erreichen, umsomehr, als diese ja jetzt in Folge der schnellen Temperaturabnahme eine besonders tiefe Lage hat. Während er aber in solche Höhen vordringt, dass in der Umgebung bereits die Temperatur 0° herrscht, kann seine eigene Temperatur im Allgemeinen noch nicht so tief gesunken sein. Verglichen mit den durchschnittlichen Verhältnissen erscheint also die Isothermfläche Null im feuchten aufsteigenden Strom gehoben, in der Umgebung gesenkt. Der aufsteigende Strom führt also tropfbares Wasser in Höhen hinauf, in denen neben ihm das Wasser nur in fester Gestalt als Eiskrystall anzutreffen ist. Vermittelst des aufsteigenden Stroms können also Eiswolken und Wasserwolken in gleicher Höhe nebeneinander bestehn.

Wenn der Strom hinreichend weit aufsteigt, so sinkt seine Temperatur ebenfalls auf 0°, schliesslich unter 0°, und die jetzt in fester Aggregatform condensirten Wassermassen veranlassen die Bildung von Cirrus und Cirrostratus, oder sie fallen auch z. Th. als Hagel oder Schnee herab, auf ihrem Wege tropfbares Wasser antreffend. Unter diesen Umständen kommen also Wasser und Eis in innige Berührung miteinander.

Es fragt sich nun, ob die aufsteigenden Luftströme, welche die Entstehung von Gewittern veranlassen, regelmässig in solche Regionen vordringen, dass die Bedingung des gleichzeitigen Nebeneinanderbestehens von Wasser und Eis jedesmal erfüllt ist. Leider sind zur Entscheidung dieser Frage alle jene Messungen der Höhe von Gewitterwolkeu ungeeignet, welche darauf beruhen, die Winkelhöhe des Ausgangspunkts des Blitzes und die Zwischenzeit zwischen Blitz und Donner zu beobachten. Denn dabei wird keineswegs die Lage eines besonders hohen Theils der Gewitterwolken bestimmt, sondern meist wohl gerade im Gegentheil die Lage besonders tief schwebender Wolken, die ihre Blitze zur Erde senden. Ausserdem ist die Methode an sich auch wenig zuverlässig. Für den vorliegenden Zweck geeignete Messungen giebt es fast gar nicht; mir ist nur eine einzige bekannt geworden, ausgeführt von

H. Pringle[31]). Derselbe berechnete aus der Zeit, die der Erdschatten seit dem Sonnenuntergange brauchte, um im Osten stehende Gewitter- und Cirruswolken einzuhüllen, die Höhen bezüglich zu 4290 Meter und 7800 Meter. Erstere Höhe ist in der That schon eine solche, dass dort die Temperatur 0° vorausgesetzt werden darf. Ferner sei noch nach H. J. Klein[32]) erwähnt, dass Peytier und Hossard in den Pyrenäen in den Augustmonaten der Jahre 1826 und 1827 die Höhen der unteren Fläche von Gewitterwolken zwischen 3105 und 3410 Metern fanden. Schon in diesen Höhen konnte — gemäss den Erörterungen des ersten Abschnitts — die Temperatur 0° herrschen, um so mehr also in den höheren Theilen jener Gewitterwolken. In seinen Auseinandersetzungen über die Höhe der Gewitter weist Kämtz[33]) die weitverbreitete Ansicht, dass dieselbe gering sei, entschieden zurück; auf Grund seiner Beobachtungen im Hochgebirge weist er ihnen etwa eine Höhe von mindestens 10000 Fuss zu.

Dass der aufsteigende Strom wenigstens häufig bis zur Eisregion vordringt, bestätigt Reye durch folgende Bemerkung: „Feuchte aufsteigende Luftströme treten weit leichter in höheren Schichten der Atmosphäre auf als in tieferen, weil oben der Luftdruck geringer ist als unten. Wirklich sehen wir an warmen ruhigen Sommertagen sehr oft prächtige Haufenwolken sich aufthürmen, die in mächtigen Säulen nach oben hin sich ausdehnen, und deren abgerundete Gipfel die dünnen Federwolken der oberen Atmosphäre sichtlich schnell durchbrechen; bisweilen entwickeln sie sich zu Gewittern, und Abends sieht man sie nicht selten wetterleuchten.“ Hierzu erinnere man sich, dass die Federwolken erwiesenermassen aus Eistheilchen bestehn. (Vergl. den zweiten Abschnitt.)

Ein wichtiger Beleg für dieses Vordringen bis zur Eisregion (oder auch für das Herabsinken der Isothermfläche Null) ist ferner das so überaus häufige Auftreten des Hagels bei Gewittern. Auf die wichtige Rolle, die der Hagel bei der Entstehung von Gewittern spielt, hat schon W. Spring[34]) nachdrücklich hingewiesen; doch kann ich die speciellere Ausführung dieses Gedankens durch ihn nicht für richtig halten. (Vergl. den fünften Abschnitt.)

Durch die bisherigen Auseinandersetzungen ist das gleichzeitige Nebeneinanderbestehen von Eiswolken und Wasserwolken bei den Gewittern des aufsteigenden Luftstroms wenigstens wahr-

scheinlich gemacht. Wir brauchen aber nicht bei der blossen Wahrscheinlichkeit stehen zu bleiben. Die sorgfältigen und umfassenden Beobachtungen zweier der bedeutendsten Meteorologen, Hann und Kämtz, berechtigen nämlich zu dem Schluss, dass dieselbe Bedingung bei jedem Gewitter erfüllt ist, und zwar ebensowohl bei den Gewittern der ersten, als bei denen der zweiten Classe. Hann[35]) sagt: „Die erste Classe von Gewittern entsteht durch Vereinigung und besonders durch Anwachsen der gebirgsartig gethürmten Haufwolken, die sich alsbald oben mit einer Decke von Cirrostratus überziehen.“ Von der anderen Classe von Gewittern, welche ihre Entstehung den grossen atmosphärischen Wirbeln verdanken, und welche meist über ganze Länder hinwegziehen, sagt Hann: „Dem Eintritt dieser Gewitter geht in den allermeisten Fällen das Erscheinen der Cirrusdecke voraus, die entweder allmählich den ganzen Himmel umspinnt, und unter welcher, sich merklich herabsenkend, die Cumulusmassen den Gewitterheerd bilden, oder die als geschlossene wohlbegrenzte weisse Wand am Horizonte bald langsamer, bald rascher heraufrückt. Diese letztere Form ist besonders die Form der Sturmgewitter und Hagelwetter.“

Beachten wir die Thatsache, dass Cirrus und Cirrostratus aus Eistheilchen bestehen, so ist es nach diesen Aussprüchen Hanns zweifellos, dass bei beiden Arten von Gewittern Eis- und Wasserwolken gleichzeitig auftreten. Dieselbe Folgerung muss man aus den Beobachtungen von Kämtz ziehen. Er sagt,[14]) ohne beide Arten von Gewittern zu unterscheiden: „Meistens sind (bei Gewittern) in der Höhe Cirri, in der Tiefe Cumulostrati und Nimbi.“ Ferner:[33]) „Die Cirri sind unter allen Umständen stets bei Gewittern im Sommer vorhanden.“ Ferner: „Allen Gewittern, bei denen ich den successiven Uebergang vom heiteren Himmel bis zur dichten Bewölkung verfolgen konnte, ging ein Hof (grosser Art) voraus; wenigstens nach allen Beobachtungen, die ich seit 1831 gemacht habe, wo ich auf die Erscheinung aufmerksam wurde.“ Dies schrieb er im Jahre 1836. Ein solcher Hof ist nun aber, wie im zweiten Abschnitt gezeigt ist, ein sicherer Beweis für das Vorhandensein von Eistheilchen in der Atmosphäre. An einer anderen Stelle sagt er: „Fällt eigentlicher Hagel im Sommer, dann überzieht sich, ebenso wie wir dies bei den Gewittern gesehen haben, der Himmel anfänglich mit weissen Cirri; allemal sah ich in diesen schon vor Entstehung

der tiefer ziehenden Cumuli Höfe (grosser Art) oder Spuren von Nebensonnen.“ Auch Galle beobachtete „am 29. Juli 1838 Nachmittags 6^h 20^m eine Nebensonne in dem einem Gewitter vorangehenden Cirrus.“

Ueberzeugen wir uns nun noch davon, was für Bewölkungsverhältnisse bei den oben erwähnten 3 Luftreisen an Gewittertagen angetroffen worden sind.

Glaisher traf am Abend des 31. August 1863, nachdem Vormittags ein Gewitter stattgefunden hatte, in 835 m Cumulus in weissen Haufen, in 1500 m Cumulus in schönen Hügeln, noch höher Wolken von allen Gestalten und Grössen, in 2325 m Cumulusmassen in verzerrten Formen; zu Häupten aber Cirrus, Cirrocumulus und schwarzbraune Schichten; in 2450 m einen Regenbogen zwischen niederen Cumulus und oberen Wolken.

Flammarion beobachtete um 11^h in der Gewitternacht des 14. Juli 1868, als er in der Höhe von 1700 m schwebte, einen Mondhof (grosser Art, wie die seiner Beschreibung beigegebene Figur ziemlich sicher erkennen lässt), woraus die Anwesenheit von Eistheilchen in der Höhe folgt.

Welsh kam am 17. August 1852, Nachmittags $4^3/_4{}^h$, zwei Stunden vor Hereinbrechen eines Gewitters, sogar in eine Cirruswolke hinein, denn es fielen, wie schon angegeben, in 5900 m Höhe kleine Schneekrystalle auf ihn.

Von allen Seiten sehen wir also das gleichzeitige Vorhandensein von Wasser- und Eiswolken bei Gewittern bestätigt.

Während sich bei den Gewittern des aufsteigenden Luftstroms die Ursache des Nebeneinanderbestehens von Wasser- und Eistheilchen in der Höhe unschwer erkennen liess, ist sie bei den Gewittern der zweiten Classe, welche überhaupt weniger genau erforscht sind, nicht mit solcher Bestimmtheit angebbar. Nach den älteren, von Dove und auch von Kämtz ausgesprochenen Vorstellungen, denen zufolge die Herbst- und Wintergewitter dem Einbrechen kalter Nord- oder Nordwestwinde in den warmen Südweststrom ihre Entstehung verdanken sollen, würde die innige Berührung von Wasser- und Eistheilchen leicht zu verstehen sein. Denn die kalten Luftströme wären ja die Träger von Eiswolken, während die warmen Ströme Wasserwolken mit sich führten. Es erscheint jedoch den heutigen Kenntnissen von den Gewittern zweiter Classe oder den Wirbelgewittern angemessener, sie als durch ähnliche Vorgänge bedingt anzusehen wie die Ge-

witter erster Classe, und mehr einen quantitativen als qualitativen Unterschied zwischen beiden Vorgängen anzunehmen. Unter diesen Umständen brauchen wir uns nicht nach einer neuen Ursache für das Auftreten beider Aggregatformen des Wassers umzusehen.

Mögen nun also die Vorgänge bei den grossen Wirbelsturmgewittern ähnliche sein wie bei den Gewittern von mehr localer Natur, oder mögen sie sich von den letzteren unterscheiden: unter allen Umständen steht doch fest, dass bei jedem Gewitter Wassertheilchen führende Wolken und Eistheilchen führende Wolken gleichzeitig in der Höhe vorhanden sind und vielfach mit einander in reibende Berührung kommen müssen.

Vierter Abschnitt.

Reibung von Wassertröpfchen gegen Eis.

Es ist eine schon längst aufgefundene, aber — wie es scheint — wieder in Vergessenheit gerathene Thatsache, dass die Reibung kleiner Wassertröpfchen gegen Eis eine ergiebige Elektricitätsquelle ist. Seit Faradays[36]) umfassender Untersuchung über die Ursache der Elektricitätserregung bei der Armstrongschen Dampfelektrisirmaschine weiss man, dass durch Reibung kleiner Wassertröpfchen gegen die verschiedensten festen Körper Elektricität entwickelt wird. Alle Körper, gegen welche Faraday den mit Wassertröpfchen beladenen Dampfstrahl stossen liess, wurden durch die reibenden Tröpfchen negativ erregt, die letzteren selbst also positiv. War das mitgerissene Wasser aber durch die kleinste Beimengung einer Säure oder eines Salzes verunreinigt, so war in Folge des dadurch stark gesteigerten Leitungsvermögens gar keine Elektricitätserregung nachweisbar. Schon mit gewöhnlichem Wasser gelang die Elektricitätserregung nicht; das Wasser musste destillirtes sein. In der That weiss man jetzt durch F. Kohlrauschs[37]) Untersuchungen, dass wahrhaft reines Wasser einer der schlechtesten Leiter ist. Dadurch wird es verständlich, dass sich bei der Reibung reinen Wassers ebenso gut wie bei der Reibung anderer schlecht leitender Substanzen die Entstehung grosser Elektricitätsmengen leicht nachweisen lässt.

Wenn man nicht den Nachweis führen will, dass die allerverschiedensten Körper durch Reibung mit Wassertröpfchen elektrisch werden, sondern wenn man sich damit begnügen will, nur ein oder das andere Metall mit Tröpfchen zu reiben, so kann man, statt Faradays complicirteren Dampfstrahlapparat anzu-

wenden, folgenden einfachen Weg einschlagen. Man erhitzt einen kleinen Tiegel aus dem betreffenden Metall (Pt, Cu oder dergl.) bis zur Rothgluth, bringt einen Tropfen destillirtes Wasser hinein und setzt den nun isolirt aufgestellten Tiegel mit dem Elektrometer in leitende Verbindung. Sobald der Tiegel sich hinreichend abgekühlt hat, verdampft der bis dahin im sphäroidalen Zustand befindliche (Leidenfrostsche) Tropfen plötzlich, und dabei werden viele kleine Tröpfchen so heftig reibend an den Tiegelwänden entlang geschleudert, dass der Tiegel eine starke elektrische Ladung erhält; dieselbe ist negativ. Diese Versuchsanordnung ist natürlich ungeeignet zum Nachweis der Elektrisirung des durch Tröpfchen geriebenen Eises. Zu diesem Zweck ist aber auch der mit Wassertröpfchen beladene Dampfstrahl nicht zu brauchen, weil er das Eis zu schnell zum Schmelzen bringt. In diesem Falle führt ein anderes ebenfalls von Faraday angewandtes Verfahren zum Ziel.

Wenn man comprimirte Luft plötzlich ausströmen lässt, so schlägt sich in Folge der mit der Ausdehnung verbundenen Abkühlung — falls nur die Compression nicht zu gering war — der in der Luft enthaltene Wasserdampf in Gestalt sehr feiner Tröpfchen nieder. So verfügt man also über einen Luftstrahl, der mit Tröpfchen ganz reinen Wassers beladen ist. Nun berichtet Faraday:

„Wenn ungetrocknete gemeine Luft plötzlich gegen den Messing- oder Holzkegel herausgelassen wurde, so machte sie denselben negativ, genau wie der Strom aus Dampf und Wasser. Als man jedoch gemeine Luft gegen Eis strömen liess, machte sie dieses positiv, ein Mal wie das andere, während sie dazwischen Holz und Metall negativ elektrisirte.“

Trotz der vollkommenen Zuverlässigkeit aller Faradayschen Beobachtungen schien es mir doch nicht überflüssig, die von ihm entdeckte Elektricitätserregung durch Reibung von Wasser gegen Eis aus eigener Anschauung kennen zu lernen, schon um eine Vorstellung von der Stärke dieser Elektricitätserregung zu erhalten. Wenn man bei Anstellung dieser Versuche nicht durch regellose und einander scheinbar widersprechende Resultate lange aufgehalten werden will, muss man eine Anzahl von Vorsichtsmassregeln genau beachten, auf die zum Theil schon Faraday aufmerksam gemacht hat.

Als Luftbehälter, aus dem die verdichtete Luft ausströmen

sollte, diente ein cylindrisches Kupfergefäss von 23,5 cm Höhe und 14 cm Weite. In der Mitte der einen Grundfläche ist ein möglichst kurzes weites Ausströmungsrohr angesetzt, das durch einen Hahn mit einfacher Bohrung zu verschliessen ist. Die Länge dieses Rohres mit Einschluss des Hahns beträgt 7 cm; die Weite der Hahnbohrung ist gleich derjenigen des ganzen übrigen Ausströmungscanals, nämlich 8 mm. Vermittelst dieses Rohres, dessen freies Ende an der Aussenfläche ein Schraubengewinde trägt, konnte das Kupfergefäss luftdicht mit der Compressionsvorrichtung verbunden werden. Letztere war der Bequemlichkeit halber nicht eine gewöhnliche Compressionspumpe, sondern ein mir zufällig zur Verfügung stehendes starkwandiges Kupfergefäss von etwa 35 Liter Inhalt mit 3 Röhrenansätzen, die durch Hähne verschliessbar sind. Der eine oben befindliche dient zur Verbindung mit dem vorher beschriebenen Luftbehälter, sowie — vermittelst einer Rohrverzweigung — mit einem Quecksilbermanometer, die beiden anderen zum wasserdichten Anschluss an die Wasserleitung des Hauses und zum Ablassen des Wassers. Das unter dem starken Druck der Wasserleitung einströmende Wasser verdichtet die Luft. Wenn der Druck der comprimirten Luft auf etwa 1,9 Atmosphären gestiegen war, wurde der Zufluss abgestellt und der Luftbehälter geschlossen. Die Ausströmungsversuche wurden also mit Luft vom durchschnittlichen Druck von 1,9 Atmosphären ausgeführt.

Besondere Sorgfalt musste darauf verwendet werden, das Ausströmungsgefäss und besonders den Ausströmungscanal nebst Hahn vollkommen frei von jeder Spur von Harz, Fett, Oel oder sonstigem Schmiermittel zu halten, weil jedes mitgerissene Theilchen das Resultat fälscht. Daher wurden die einzelnen Theile des Hahns sowie das ganze Gefäss mit heissem Sodawasser sorgfältig ausgewaschen. Als Schmiermittel für den Hahn durfte nur Wasser dienen.

Schon Coulier [38]) und Mascart haben bemerkt, und Aitken [39]) hat es bestätigt, dass nach einigen Wiederholungen mit demselben Gefäss bei der Entspannung kein Nebel entsteht, auch wenn die eingeschlossene Luft hinreichend wasserhaltig ist, ja sogar wenn sie mit Wasser durchgeschüttelt ist. Durch Baumwolle filtrirte Luft war von vornherein unwirksam zur Nebelerzeugung, während sie durch geringe Beimengungen von Staub oder Tabakrauch ausserordentlich geeignet dazu wurde. Hiernach muss man schliessen, dass der Vorgang der Conden-

sation eine wesentliche Beförderung durch die Anwesenheit von Staubtheilchen erfährt, indem letztere als Kerne dienen, um welche sich die Tröpfchen bilden. Auch mir schien wiederholtes Fehlschlagen der Elektrisirungsversuche auf mangelhafter Nebelbildung zu beruhen; daher brachte ich häufig vor den einzelnen Versuchen das Gefäss mit geöffneter Ausströmungsöffnung unter eine Staubwolke, die z. B. durch Zusammenklappen verstaubter Bücher oder sonst wie erzeugt war.

Das zum Nachweise der Elektricität benutzte Thomsonsche Quadranten-Elektrometer (von Lorenz in Chemnitz) wurde auf solcher Empfindlichkeit erhalten, dass der Lichtzeiger auf der, 65 cm vom Spiegel entfernt aufgestellten Skala etwa 23 mm Ausschlag gab, wenn die mit den beiden Quadrantenpaaren verbundenen Klemmschrauben, — statt wie vorher miteinander verbunden zu sein, — nun mit den beiden Polen des kleinen Normalelements verbunden wurden. Als Normalelement diente Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung, Zink in concentrirter Zinkvitriollösung. Bei den Versuchen wurde das eine Quadrantenpaar vermittelst der Gasleitung zur Erde abgeleitet, das andere mit einem Aufsaugekamm in Verbindung gesetzt, der auf einem gut isolirenden Glasfuss befestigt war. Der Aufsaugekamm war einer Holtzschen Influenzmaschine entnommen.

Der der Tröpfchenreibung zu unterwerfende Körper K, z. B. ein kleiner Kegel oder ein ebenes Blech von Kupfer oder Messing, oder ein Stück Eis, wurde auf einem gefirnissten, gut isolirenden Glasfuss mit hölzerner Grundplatte befestigt und so aufgestellt, dass die Oeffnung des Ausströmungscanals $^1/_2$ bis 1 cm von dem nächsten Punkte des Körpers K entfernt war, und dass der austretende Luftstrom nahe an einer Kante des Körpers schräg auf seine Oberfläche traf. Es erwies sich als nützlich, die Reibungsversuche nicht zu nahe am Elektrometer auszuführen und den Luftstrom möglichst vom Elektrometer wegzurichten, damit die geriebenen Wassertheilchen jedenfalls nicht dem Elektrometer nahe kommen und durch ihre Elektricität, die ja derjenigen des geriebenen festen Körpers entgegengesetzt ist, die Angaben des Instruments störend beeinflussen konnten.

Sobald der Luftstrom mit den Tröpfchen den Körper K getroffen hatte, wurde letzterer, indem man seinen Holzfuss ergriff, dem Aufsaugekamm ganz nahe gebracht und der Ausschlag des Lichtzeigers beobachtet. Wenn der Kupferkegel oder das gerade

Kupferblech oder das Messingblech als geriebener Körper diente, so wurde er durch Reibung negativ; der Lichtzeiger ging meist weit über die Skala hinaus, d. h. der Ausschlag betrug erheblich mehr als 500 mm. Bei zwischendurch angestellten Controlversuchen, bei denen der Körper K in derselben Weise dem Aufsaugekamm genähert wurde, ohne vorher der Tröpfchenreibung unterworfen worden zu sein, erfolgte dagegen gar kein Ausschlag oder nur gelegentlich einmal eine ganz schwache Spur von Bewegung. Der isolirende Glasfuss wurde wiederholt mit einer Spiritusflamme überstrichen, um ihm jede Spur von Elektricität zu nehmen. Auch der Körper K wurde vor jedem neuen Versuch durch Erhitzung von dem Feuchtigkeitsüberzuge befreit, der sich beim vorhergehenden Versuch auf ihm gebildet hatte.

Es erwies sich als durchaus nothwendig, beim Oeffnen den Ausströmungshahn so schnell als möglich zu drehen. Versäumt man dies, dreht ihn also etwas zögernd auf, so kann man sicher sein, falsche Ausschläge des Elektrometers zu erhalten. In diesem Falle nämlich findet starke Reibung der ausströmenden Tröpfchen an dem Hahncanal statt; die Tröpfchen kommen also schon + elektrisch zum Körper K und geben diesem ihre + Elektricität ab, so dass er durch die Reibung nun nicht merklich negativ erregt werden kann. Ist dagegen die Ausströmung ohne merkliche Reibung von Statten gegangen, — was sich durch das kurze, scharfe, explosionsartige Ausströmungsgeräusch deutlich kund giebt, — so kommen die Tröpfchen unelektrisch zum Körper K und erregen ihn durch Reibung negativ. Ich konnte auf diese Art nach Belieben Ausschläge des Lichtzeigers im positiven oder negativen Sinne hervorrufen, je nachdem ich den Hahn langsam oder schnell aufdrehte.

Nach diesen Vorversuchen konnte zu den Hauptversuchen über die Reibung der Wassertröpfchen an Eis fortgeschritten werden. An kalten Wintertagen liess ich einen Metallstiel in das zu benutzende Eisstück einfrieren, um es mittelst desselben auf dem Isolirfuss befestigen zu können. Das gestielte Eisstück wurde bis zum Gebrauch im Freien liegen gelassen und erst dicht vor dem Reibungsversuch auf dem Isolirfuss befestigt. An einem Versuchstage hatte es die Temperatur — 2,5° C. und wurde bei zwölfmaliger Wiederholung des Versuchs regelmässig stark + elektrisch, so dass der Ausschlag 120 mm oder mehr betrug.

Nur wenn das Eisstück absichtlich lange im Zimmer gelassen und dadurch mit Schmelzwasser überzogen war, oder wenn es mit Hilfe der Spiritusflamme theilweise geschmolzen wurde, so entstand durch Reibung mit den Tröpfchen keine Elektrisirung. Hiermit dürfte zugleich erwiesen sein, dass Reibung von Wasser an Wasser nicht als Elektricitätsquelle dienen kann.

Bei anderen Versuchen hatte das Eis die Temperatur — 10° C.; die Zimmertemperatur war — 1°. Der Luftbehälter wurde unmittelbar vor der Compression auf 40 bis 50° erwärmt, damit der beim Ausströmen entstehende Nebel nicht etwa aus Eistheilchen bestände. Jetzt war die Elektrisirung des Eises ebenfalls +, aber viel stärker als zuvor; der Lichtzeiger ging weit über die Skala hinaus. Abwechselnd mit den letzteren Eisreibungsversuchen wurden zur Controlle Versuche mit dem Kupferkegel angestellt; sie ergaben, wie es sein musste, starke — Elektrisirung des letzteren. Die hier bemerkte Erscheinung der stärkeren Elektricitätserregung bei niedrigerer Temperatur des Eises hängt wohl damit zusammen, dass das Isolationsvermögen des Eises mit abnehmender Temperatur ungemein schnell zunimmt. Nach Versuchen von Ayrton und Perry [40]) betrug der Widerstand eines Cubikcentimeters Eis

284 Megohm bei — 0,2° C.
1023 „ „ — 6,2° „
2240 „ „ — 12,4° „

Fünfter Abschnitt.

Ursprung der Gewitter-Elektricität.

In den bisherigen Erörterungen sind zwei Thatsachen zum Ausdruck gekommen, eine meteorologische und eine physikalische, deren Verknüpfung ohne Weiteres zur Erkenntniss des Ursprungs der Gewitter-Elektricität führt. Im dritten Abschnitt ist nachgewiesen, dass immer beim Ausbruch eines Gewitters Eistheilchen und Wassertheilchen in der Höhe gleichzeitig vorhanden sind und sich heftig aneinander hin bewegen. Im vierten Abschnitt ist sodann gezeigt, dass die Reibung von Tröpfchen reinen Wassers gegen Eis Elektricität von hoher Spannung erzeugt, und zwar um so mehr, je kälter das Eis ist. Dabei erhält das Eis positive, das Wasser negative Ladung. Daraus folgt also, dass die beim Gewitterausbruch thatsächlich vorhandene heftige Bewegung von Eis- und Wassertheilchen nothwendig mit starker Elektrisirung dieser Theilchen verknüpft sein muss. Hiermit ist, — wie mir scheint, — die wesentliche Quelle der Gewitter-Elektricität nachgewiesen.

Genauer in die einzelnen Vorgänge einzudringen, die sich nun beim Gewitter abspielen, dürfte man vorläufig kaum mit Sicherheit im Stande sein, wenigstens wenn man auf festem, durch Beobachtungen und Versuche gut begründetem Boden bleiben will. Wenn trotzdem im Folgenden noch einige anspruchslose und keineswegs erschöpfende Bemerkungen über einzelne wichtigere Punkte hinzugefügt werden, so geschieht es hauptsächlich, um vielleicht dieses oder jenes Bedenken gegen die vorgetragene Theorie zu heben, und zugleich um das Bild jedenfalls ein wenig vollständiger zu machen.

Die Elektrisirung der Eis- und Wassertheilchen, die im Vorigen als thatsächlich erfolgend nachgewiesen ist, würde nur von kürzester Dauer sein und keine erheblichen Spannungen herbeiführen können, wenn sie nicht von der sofortigen räumlichen Sonderung der positiv und negativ erregten Theilchen begleitet wäre. Man ist ja nun freilich keineswegs in der Lage, die Bewegungsvorgänge in den hohen Regionen in's Einzelne zu verfolgen; aber im Allgemeinen kann man sich doch davon Rechenschaft geben, dass eine solche Trennung der entgegengesetzt elektrisirten Theilchen wirklich eintreten muss.

Wenn zwei verschiedene Luftströme, der eine mit Eistheilchen, der andere mit Wassertheilchen beladen, mit grosser relativer Geschwindigkeit aneinander hinfliessen, oder auch specieller wenn ein solcher Strom ruhige Luft durchbricht, welche die Theilchen anderer Art enthält, so geschieht die Reibung da, wo die Eistheilchen mit den Wassertheilchen in Berührung kommen, d. h. an der Grenze der Ströme. Nun wäre es unrichtig sich vorzustellen, dass an solchen Grenzflächen nothwendiger Weise eine schnelle Vermischung beider Luftmassen eintreten müsste, wobei dann freilich positiv und negativ elektrisirte Theilchen regellos durcheinander geworfen würden. Aehnlich wie der Golfstrom ungeheure Strecken im Meere zurücklegt, ohne sich mit dem umgebenden Wasser zu mischen, werden sich auch zwei Luftströme von verschiedener Temperatur und Dichtigkeit lange Zeit unvermischt erhalten. Man erinnere sich z. B., dass die durch Rauch kenntlich gemachten Wirbelringe, die man aus dem bekannten Luftstossapparat heraustreibt, viele Meter weit durch die umgebende ruhige Luft hin fortschreiten, ohne — soweit man es zu beurtheilen vermag — auch nur ein Partikelchen zu verlieren. Oder man vergegenwärtige sich die Versuche des Herrn Vettin [41]), in denen rauchbeladene Luftströme, durch kurzdauernde Erwärmung einer Stelle des Gefässbodens zum Aufsteigen in ruhiger und reiner Luft gebracht, ihre merkwürdigen Pilzformen mit wirbelnden Rändern in deutlicher Sonderung von der übrigen Luft erhalten.

Auch die bei manchen Ballonfahrten beobachtete Erscheinung der Luftspiegelung, die ja auf der totalen Reflexion an der Grenze zweier Luftschichten von ungleicher Dichtigkeit beruht, spricht für das unvermischte Nebeneinanderfliessen verschiedener Luftströme. Als Tissandier [3]) am 16. August 1868 von Calais aufgestiegen war, fand er in der Höhe eine Luftströmung, die ihn

mit der Geschwindigkeit von etwa 7 lieues in der Stunde nordostwärts trieb, so dass er sich bald über der Nordsee befand. Da sah er, in die Höhe blickend, das Spiegelbild der Nordsee, worin ein Dampfschiff mit abwärts gekehrten Masten schwamm; also floss in grösserer Höhe als der Ballon ein Strom dünnerer Luft, an dessen Grenze die totale Spiegelung stattfand.

Hingegen sahen Barral und Bixio am 27. Juli 1850 in etwa 6000 m Höhe das Spiegelbild der Sonne unterhalb derselben, so als ob eine Spiegelfläche horizontal etwa durch das Luftschiff gelegt wäre. Hier floss also (wie schon Hr. Reye geschlossen hat) ein Strom dichterer Luft oberhalb einer dünneren Luftschicht. Auch in diesem Falle hatte man es keineswegs mit ruhender Luft zu thun, vielmehr mussten starke Strömungen vorhanden sein, denn die Luftfahrer hatten in $1\frac{1}{2}$ Stunden 9 Meilen in horizontaler Richtung zurückgelegt.

Wenn nach solchen Erfahrungen eine schnelle Vermischung der beiden reibenden Luftmassen nicht vorauszusetzen ist, so ist also die Bedingung des schnell und weit Getrenntwerdens der + und — elektrisirten Theilchen erfüllt.

In anderen Fällen werden sich andere Vorgänge abspielen. Es kann etwa vorkommen, dass der aufsteigende Strom in seinem obersten Theile Anlass zur Schnee- oder Hagelbildung giebt, und dass diese schwereren Eiskörperchen durch die tieferen, noch mit Wassertröpfchen beladenen Theile des aufsteigenden Stroms herabfallen. Dabei wird der Tröpfchen-führende Strom negative Elektrisirung erfahren, während die positiv erregten Eistheile herausfallen.

Es kann sich ferner ereignen, dass der aufsteigende Strom sogar oberhalb der Cirrostratusdecke Regen veranlasst. Dann werden, sobald die regnenden Theile des Stromes nicht nur gerade über dem unteren Theil desselben sich befinden, sondern auch seitlich übergreifen, die Regentropfen durch die Cirruswolken herabfallen und letztere mehr oder weniger stark positiv elektrisirt zurücklassen.

Gelegentlich sei hier noch darauf hingewiesen, dass es auch leicht vorkommen kann, dass elektrische Wolken aus der Eisregion tief herabsinken; niedrig schwebende Gewitterwolken sind daher durchaus kein Beweis gegen die vorliegende Theorie.

Bezüglich der Gewitter des aufsteigenden Stromes mag schliesslich noch erwähnt werden, dass — wenigstens in unseren Breiten, und wohl auch anderwärts — ihre Hauptentwickelung in den Nachmittagsstunden von 3—5 Uhr, und zwar in den ersten Sommer-

monaten etwas früher, in den späteren Sommermonaten etwas später, stattzufinden scheint, wie u. A. aus Ludewigs [42]) Zusammenstellung zweijähriger Beobachtungen im Deutschen Reichs-Telegraphengebiet, aus Lancasters [43]) Discussion 46-jähriger Beobachtungen in Belgien u. s. w. hervorgeht. Zu jenen Nachmittagsstunden ist an der Erdoberfläche die Maximaltemperatur des Tages erst kürzlich überschritten, aufsteigende Ströme haben sich am kräftigsten entwickelt, und in der Luftmasse ausserhalb derselben hat die Isothermfläche Null sich bereits wieder zu senken begonnen. Auf diese Art ist die relative Geschwindigkeit beider Luftmassen besonders gross, und somit nicht nur der Act der Reibung, sondern auch die Wegführung der entgegengesetzt elektrisirten Theilchen von einander besonders begünstigt.

Es ist schon von verschiedenen Schriftstellern erörtert worden, dass das Zustandekommen der hohen elektrischen Spannungen beim Gewitter vermuthlich durch die Vereinigung vieler kleiner, mässig stark elektrischer Tröpfchen zu einem grösseren Tropfen zu erklären ist; denn hierbei wird die zuvor über eine grössere Gesammtoberfläche ausgebreitete Elektricität auf die kleinere Oberfläche des resultirenden Tropfens zusammengedrängt, was von einem Steigen der Spannung begleitet sein muss. Doch wird letztere dabei gewiss nicht so gross, dass eine Schlagweite von Meilen-Länge resultirte. Eine solche giebt es wohl auch überhaupt nicht, trotzdem dass Blitze von solcher Länge wohl vorkommen. Die Länge eines Blitzes ist eben im Allgemeinen nicht einfach als Schlagweite des elektrischen Funkens zwischen zwei Leitern aufzufassen, sondern der Blitzvorgang ist, wegen der grossen Zahl unterwegs angetroffener Tröpfchen, viel eher mit der Funkenbahn bei den Blitztafeln oder Blitzröhren der physikalischen Cabinette zu vergleichen.

Früher hat es Schwierigkeiten gemacht zu verstehen, wie eine und dieselbe Wolke oft so lange Zeit unausgesetzt Blitze aussenden könne. Diese Thatsache ist aber leicht verständlich, wenn man bedenkt, dass die Vorgänge der Elektrisirung und Spannungsvermehrung so lange andauern, als Eis- und Wasser-führende Luftströme reibend aneinander hinfliessen, und als die Vereinigung kleiner Tröpfchen zu grösseren vor sich geht.

In der kalten Zone, wo sich überwiegend Eistheilchen in der Luft befinden, Wassertheilchen meist fehlen, wird es natürlich selten zur Entwickelung eines Gewitters kommen können. — Dass

in der *heissen* Zone die aufsteigenden Luftströme zu der hier jedenfalls höher befindlichen Eisregion vorzudringen vermögen, erklärt sich aus der grösseren Heftigkeit des Aufsteigens in Folge des hohen Dampfgehalts der Tropenluft. Die Anwesenheit von Eiskrystallen in den hohen Luftregionen auch der Tropen ist übrigens durch Beobachtungen von Cirruswolken und von Höfen grosser Art durch Humboldt und andere Reisende ausser Zweifel gesetzt.

Jedoch es ist, wie schon Eingangs erwähnt, durchaus nicht die Absicht dieser Schrift, eine irgendwie erschöpfende Theorie der Gewittererscheinungen zu geben; daher mag es bei diesen wenig zusammenhängenden Einzelbemerkungen sein Bewenden haben. Dagegen muss in der Kürze noch einiger jüngst veröffentlichter Gewittertheorieen gedacht werden, welche mit der hier vorgetragenen Anschauung einige Verwandtschaft zeigen. Fassen wir zunächst die Theorieen der Herren E. Gerland[26]) und E. Hoppe[27]) in's Auge. Beide fassen die meteorologischen Vorgänge bei den Gewittern, insbesondere die Bedeutung des aufsteigenden Luftstroms (freilich ohne Berücksichtigung des Vordringens bis zur Eisregion) im Wesentlichen ebenso auf, wie es im Vorhergehenden entwickelt ist. Aber die Ansichten beider Autoren über den Ursprung der Elektricität bei diesen Vorgängen sind vollständig andere.

Herr Gerland lässt es unentschieden, ob *die Reibung der Tropfen an der Luft* oder *die Tropfenbildung selbst* als eigentliche Ursache der auftretenden Elektricität anzusehen sei. Nun sind aber beide Vorgänge bisher durch keinerlei Experimente wirklich als Elektricitätsquellen nachgewiesen. Daher kann diese Anschauung bis auf Weiteres nur als eine reine Hypothese gelten.

Herr Hoppe schreibt bei den Gewittern des aufsteigenden Luftstroms die Elektricitätsentwickelung der *starken Reibung* zu, *welche der Tröpfchen-führende Luftstrom an seiner Seite erfährt*. Bei den Depressionsgewittern soll ebenfalls *durch Reibung kalter Luftströme an warmen* die Elektricität erzeugt werden. Welche Körper aber hierbei die eigentlich reibenden sind, bleibt unentschieden. Ist es die Reibung von Wasser an Wasser, wie schon Fr. Mohr[44]) annahm, oder ist es die Reibung der Wassertröpfchen an der Luft, welche die Elektricität erregen soll? Soviel ich sehe, ist letzteres die Ansicht Hoppes. Dass Eistheilchen dabei als Hauptfactoren im Spiele sind, bleibt von ihm unbemerkt. Freilich hat er eine

grössere Reihe von Versuchen angestellt, bei denen kalte und warme Luftströme in ein mässig evacuirtes Gefäss eindringen und dem darin befindlichen Conductor starke Elektricität mittheilen. Aber der daraus gezogene Schluss, dass die Reibung der verschiedenen Luftströme aneinander hier die wahre Elektricitätsquelle sei, scheint mir nicht zulässig. Herr Hoppe sagt nämlich ausdrücklich, er habe höhere Druckdifferenzen angewandt, „da bei geringen Druckdifferenzen durch die engen Hähne die Einströmung zu langsam erfolgte.“ Nach dem was im vorigen Abschnitt über den ungeheuren Einfluss der Reibung der beim Entspannen entstehenden Nebeltheilchen an den Canalwänden und der Hahnbohrung auseinander gesetzt ist, wird man nicht im Zweifel sein können, dass durch das Nichtausschliessen dieser Fehlerquelle die fraglichen Versuche jeder Beweiskraft entbehren. Es ist übrigens nicht unmöglich, dass bei denjenigen seiner Versuche, wo durch gleichzeitiges Einströmen kalter und heisser Luft sehr grosse Elektrometerausschläge erfolgten, wirklich auch noch Reibung von Wasser- und Eistheilchen stattgefunden hat; nur ist sie von Herrn Hoppe nicht als solche erkannt worden.

Eine nähere Berührung mit der von mir entwickelten Anschauung hat die Theorie des Herrn W. Spring.[34]) Derselbe sieht den Heerd der Gewitterbildung in den oberen eisigen Regionen der Atmosphäre, genauer gesagt: in der Region des trockenen Hagels. Die Ursache der Elektricitätsentwickelung soll eine doppelte sein. Zunächst soll das Zusammengefrieren mehrerer kleiner Eistheilchen allein schon Elektricität-erregend wirken wegen der Verkleinerung der Oberfläche. Dies würde aber doch nur für einen Leiter Geltung haben, und auch nur dann, wenn er vorher schon Elektricität besass; für das schlecht leitende Eis aber trifft es nicht zu. Die zweite Quelle der Elektricität, und zwar die hauptsächlichste, soll sodann sein: Die Reibung der trocknen Luft an dem sich frisch bildenden Eise der Hagelkörner, welches noch nicht mit einer Luftschicht überzogen ist. Hiergegen ist vor Allem geltend zu machen, dass die hier herbeigezogene Ursache der Elektricitätserregung durch Reibung trockner Luft an Eis rein hypothetisch und durch keinerlei Versuche als wirklich existirend nachgewiesen ist. Zwar sucht Hr. Spring die von Faraday festgestellte Thatsache, dass reine, tropfenfreie Luft unvermögend ist, einen festen Körper durch Reibung zu elektrisiren, darauf zurück-

zuführen, dass jeder in Luft befindliche Körper mit einer festhaftenden Luftschicht überzogen sei, und dass bei jenen Faradayschen Versuchen in Wahrheit nur Luft gegen Luft gerieben habe, wodurch natürlich keine Elektricität entstehen könne. Und zum Beweise dafür, dass durch Reibung trockner Luft gegen einen festen, von seinem Luftüberzuge befreiten Körper Elektricität erzeugt werde, lässt er einen Strom getrockneter Luft gegen die auf 70^0 bis 80^0 erwärmte Kugel eines Goldblattelektroskops stossen, wobei sich starke + elektrische Erregung zeigt. Aber diese Versuche scheinen mir durchaus nicht beweisend zu sein, weil allerlei störende Umstände nicht ausgeschlossen waren. Der trockne Luftstrom strich nämlich nach dem Austritt aus dem Compressionsgefäss erst durch eine Röhre mit nur 2 mm weiter Oeffnung und traf dann auf das Elektroskop. Die Luft des zu ebener Erde gelegenen Laboratoriums war aber äusserst feucht (wie Spring selbst hervorhebt), indem die Versuche während heftigen Regens gemacht wurden. So musste die durch die Ausdehnung stark abgekühlte Luft in der mit ihr sich mischenden feuchten Luft der Röhre Condensation bewirken, die Tröpfchen mussten durch Reibung an der Röhre positiv elektrisch werden und diese ihre Elektricität der Kugel des Elektroskops mittheilen. Wenn aber auf dem Wege von der Rohrmündung bis zur Elektroskopkugel hinreichend viel Tröpfchen aus der freien Laboratoriumsluft niedergeschlagen wurden, so konnte deren Reibung an der Kugel letztere negativ elektrisch machen. Mit dieser Deutung stimmt die von Spring erwähnte Unregelmässigkeit der Erscheinung überein: es kam vor, dass die Goldblättchen bisweilen plötzlich zusammenfielen und dann von neuem divergirten. In der That ist es den Herren Elster und Geitel[45]) nicht gelungen, diesen Springschen Versuch mit Erfolg zu wiederholen.

Ich habe bei einigen darüber angestellten Versuchen stets mässige negative Erregung erhalten (entgegen Springs Beobachtung), vielleicht auf der Reibung durch Staubtheilchen beruhend.

Aber selbst wenn durch Reibung reiner trockner Luft an erhitzten Metallen Elektricität erregt würde, so wäre damit immer noch kein Beweis für die Elektricitäts-Erregung durch Reibung trockner Luft an Eis geliefert. Sonach steht die Springsche Theorie auf durchaus hypothetischem Boden wie die vorher erwähnten Theorieen, während die in der vorliegenden Schrift entwickelte Ansicht auf einer durch's Experiment völlig sicher gestellten Grundlage ruht.

Sechster Abschnitt.

Ursprung der gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre.

Die Thatsache, dass die Reibung von Wassertröpfchen sowohl an Eis als an anderen Körpern eine ergiebige Elektricitätsquelle ist, scheint geeignet, auch einiges Licht auf die bisher so wenig verstandene Erscheinung der gewöhnlichen atmosphärischen Elektricität zu werfen, jener Elektricität, welche immer vorhanden ist, gänzlich unabhängig von den Gewittererscheinungen. Einige hierauf bezügliche Betrachtungen — keineswegs erschöpfende, sondern mehr nur andeutende — sollen im Folgenden mitgetheilt werden, obgleich ich mir keineswegs verhehle, dass sie von hypothetischer Natur und weit weniger sicher begründet sind als die vorigen Betrachtungen über die Entstehung der Gewitter-Elektricität. Sie beanspruchen auch nichts weiter zu sein als ein Versuch, diese verworrenen und scheinbar so unregelmässigen und widersprechenden Erscheinungen unter einfache Gesichtspunkte zu bringen.

Die für die atmosphärische Elektricität charakterischen Züge, welchen jede Theorie dieser Erscheinung gerecht werden muss, sind, soviel ich sehe, folgende:

1. Das ganz überwiegende Vorherrschen der + E.
2. Die unausgesetzten schnellen und starken Intensitätsveränderungen.
3. Die Zunahme der elektrischen Spannung bei Erhebung über die Erdoberfläche.
4. Die jährliche Periode.
5. Die tägliche Periode.

Diese Punkte sowie einige besondere Erscheinungen sollen zunächst noch etwas näher beleuchtet werden, ehe zum Versuch ihrer Erklärung geschritten wird.

1. In welchem Masse die + E. vorwiegt, ersieht man z. B. daraus, dass Quetelet[46]) in Brüssel während mehr als vier Jahren nur 23 Mal — E. beobachtete, ferner dass Birt[47]) in Kew unter 15170 Beobachtungeu, die im Laufe von fünf Jahren bei Tag und auch bei Nacht angestellt wurden, nur 665 Mal — E. fand, und zwar stets bei starkem Regen oder wenigstens bei Vorhandensein von Regenwolken. W. Thomson[51]) bezeichnet die + E. geradezu als Schönwetter-Elektricität. Denza[48]) schliesst aus seinen in Moncalieri während zwölf Jahren täglich sechs Mal angestellten Beobachtungen, dass die Luftelektricität stets + ist, wenn nicht Gewitter, Regen oder Schnee in der Nähe sind. Nach Palmieri[49]) ist das Auftreten von — E. ein sicheres Zeichen dafür, dass es in der Umgegend (bis 70 Kilometer) regnet, hagelt oder schneit. Wenn indessen Palmieri den Regen im Normalfalle für + elektrisch erklärt, und das + Regencentrum von einer — Zone umgeben sein lässt, um welche sich eine weitere + Zone herumlegt, so scheint er doch mehr Hypothese vorzutragen als wie strenge Folgerung aus Beobachtungen. Auch stimmen ihm andere Beobachter hierin durchaus nicht bei. Nach Mascart[50]) bringt Regen fast immer sehr grosse — Variationen mit sich. Der Zeichenwechsel tritt vor Anfang des Regens ein, und öfters folgen unmittelbar auf den Regen sehr grosse + Angaben. Dufour[52]) findet in Lausanne die — E. während Regen- oder Schneefällen vorherrschend. Lephay[53]) fand am Cap Horn die Luftelektricität vorwiegend +; aber Regen war mit drei oder vier Ausnahmen stets —. In ähnlichem Sinne spricht sich noch eine Reihe anderer Beobachter aus.

2. Die mit selbstregistrirenden Apparaten aufgenommenen Curven der Luft-E. zeigen, bei hinreichender Empfindlichkeit des Elektrometers, einen wunderbar zackigen unstetigen Verlauf. Darüber sagt Everett[54]): „Immer war die Abwesenheit von Stetigkeit im Vergleich zu den meisten meteorologischen Phänomenen bemerkenswerth; W i n d d r u c k ist das einzige Element, dessen Schwankungen nach Grösse und Plötzlichkeit überhaupt vergleichbar sind mit jenen des elektrischen Potentials. Selbst bei schönem Wetter belaufen sich seine Veränderungen während zwei oder drei Minuten gewöhnlich auf 20 Procent; bei veränderlichem und stürmischem Wetter sind sie viel grösser; und bei einigen seltenen Gelegenheiten ändert es sich von Secunde zu Secunde so stark, dass die Nadel in ständiger Bewegung erhalten wird.“ Auch

Mascart hebt die schnellen Veränderungen besonders hervor und erklärt gerade ihretwegen continuirliche Beobachtungen für unumgänglich nothwendig.

3. Dass die elektrische Spannung bei Erhebung in die Atmosphäre zunimmt, ist gleich von den frühesten Beobachtern bemerkt und seither fast allseitig bestätigt worden. Nur Palmieris neuere Beobachtungen, die auf dem Vesuv-Observatorium und in Neapel gleichzeitig angestellt sind, liefern (im Widerspruch mit seinen früher auf der Neapeler Sternwarte und an benachbarten Orten von verschiedener Höhenlage angestellten Beobachtungen) das entgegengesetzte Ergebniss; das gleiche soll nach Denza's Angabe mit den Beobachtungen in Moncalieri und auf dem kleinen St. Bernhard der Fall sein. Worauf diese abweichenden Ergebnisse beruhen mögen, lässt sich ohne genaue Kenntnissnahme der örtlichen Verhältnisse nicht beurtheilen. Jedenfalls scheinen sie mir nicht geeignet, das allgemeine Ergebniss aller anderen Beobachtungen für falsch zu erklären; sondern man wird diese abweichenden Beobachtungen bis auf Weiteres als eine Ausnahmeerscheinung hinnehmen müssen. Eine andere von Glaisher bei einer Luftfahrt gefundene Ausnahme kommt nachher zur Sprache.

4. Die Jahresperiode ist für verschiedene Beobachtungsorte zwar nicht identisch, jedoch stellt sich überall zweifellos heraus, dass das Maximum im Winter, das Minimum im Sommer eintritt. Die genaue Zeit des Eintritts der Extreme scheint durch örtliche oder sonstige Verhältnisse bedingt zu sein, denn man findet als den Monat mit der stärksten Luft-E. neben dem Januar auch den Februar, März, December und November angegeben, während das Minimum theils in den Juni, theils in den Mai, Juli, August fällt. Auf der südlichen Halbkugel trifft, wie Neumayers [55]) südaustralische Beobachtungen lehren, das Maximum ebenfalls in die kalte Jahreszeit (Juni), das Minimum in die heisse (März). Auch aus Lephays fast 1 Jahr lang fortgesetzten Beobachtungen am Cap Horn, die mit einem selbstregistrirenden Thomson-Mascartschen Elektrometer angestellt sind, geht hervor, dass die atmosphärische Elektricität ihr Maximum bei klarem Frostwetter, also im Winter, erreicht.

5. Wenn keine besonderen Störungen durch Gewitter oder Regengüsse stattfinden, so zeigt die Luft-E. nach Angabe der meisten Beobachter (Saussure, Schübler, Arago, Quetelet, Dellmann, Denza, Palmieri) und auch nach Ausweis selbstregistrirender

Instrumente (Everett und Whipple in Kew, Dufour in Lausanne) binnen 24 Stunden zwei Maxima und zwei Minima. Allerdings liegen auch einige gegentheilige Angaben vor; Kämtz fand im Hochgebirge (auf dem Faulhorn) nur ein Maximum, nämlich Nachmittags, und ein Minimum, nämlich Morgens; auch die selbstregistrirenden Instrumente Mascarts in Paris und Brito Capellos in Lissabon ergaben nur je 1 Maximum und 1 Minimum täglich. Wo sich die doppelte Periode zeigt, da tritt das erste Maximum Morgens etwa zwischen 7 und 10 Uhr ein, das zweite Abends zwischen 7 und 10 Uhr; die Minima finden sich etwa zwischen 2 und 5 Uhr Nachmittags und zwischen 2 und 5 Uhr Nachts. Aber die Lage der Maxima und Minima ist etwas veränderlich mit der Jahreszeit; im Sommer liegen die beiden Maxima am weitesten auseinander, im Winter rücken sie näher zusammen. So lehren nach Everett[54]) die von 1861 bis Ende Mai 1864 in Kew photographisch gewonnenen Selbstaufzeichnungen des Thomsonschen Elektrometers, dass die täglichen Maxima eintraten: im Frühling und Herbst etwa um 9^h am und 9^h pm,
im Juli „ „ 8 „ 10
im Januar „ „ 10 „ 7

Der bemerkenswertheste Umstand bei der Tagesperiode der Luft-E. ist, dass sie (nach A. Quetelet[46a]), Neumayer und Ragona) fast genau mit derjenigen des Luftdrucks zusammenfällt. In der That erklären sich bei Annahme dieses Satzes auch die erwähnten Kämtzschen Beobachtungen auf dem Faulhorn. Denn hier[55a]) in 2670 m verspätet sich das Luftdruckmaximum, wie meistens auf den Bergen, und tritt im Sommer erst nach 1^h Mittags ein; das Nachmittagsminimum des Luftdrucks aber ist nahezu verschwunden.

Neben diesen fünf charakteristischen Hauptzügen der Luft-E. verdienen noch einige besondere Erscheinungen Erwähnung; zunächst jene, die in und über den Wolken, sowie im Nebel beobachtet worden sind, und dann die Elektricität der gefrorenen Niederschläge.

Bei drei Luftfahrten (soviel mir bekannt geworden) sind eingehendere elektrische Beobachtungen ausgeführt worden, nämlich von Glaisher, Biot und Gay-Lussac, Tissandier.

Bei seinem Aufstieg am Vormittag des 17. Juli 1862 von Wolverhampton aus beobachtete Glaisher zwischen 4120 m und 7010 m die Luft-E. vermittelst eines Thomsonschen Elektrometers.

Er fand in 4120 m Höhe die Luft-E. positiv; bei wachsender Erhebung in der Atmosphäre wurde sie aber schwächer und schwächer, bis sie in 7010 m unmessbar klein geworden war. Aus der Verknüpfung dieser Beobachtung mit der unter 3. erörterten Zunahme der Elektricität bei Erhebung vom Boden scheint also zu folgen, dass die atmosphärische Elektricität nur anfänglich steigt, dann ein Maximum erreicht und in grösserer Höhe wieder abnimmt. Freilich ist dieser Schluss, weil nur auf einer einzigen Beobachtungsreihe beruhend, äusserst unsicher; möglicher Weise darf man aus Glaishers Beobachtungen nichts Anderes schliessen, als dass der Ballon allmählich denselben elektrischen Zustand wie seine Umgebung angenommen hatte; auch könnten seine Beobachtungen etwa auf mangelhafter Isolation der isolirenden Theile des Elektrometers beruhen. Indessen liefert die folgende Theorie die vollständige Erklärung des eben erschlossenen Verhaltens der Luft-E., so dass danach Glaishers Beobachtung nicht angezweifelt zu werden braucht.

Biot und Gay-Lussac[56]) stiegen am 24. August 1804 Vormittags 10 Uhr bei $16^1/_2$ ° C. von Paris auf; und ungeachtet sie sich bis zu 3898 m erhoben, sank die Temperatur doch nicht tiefer als + $10^1/_2$ ° C. In der ungefähren Höhe von 2800 m stellten sie magnetische Beobachtungen an, die so zeitraubend waren, dass für Beobachtung der Luft-E. wenig Zeit übrig blieb. „Ueberdies, schreibt Biot, hinderten uns auch Wolken, welche unter dem Ballon schwebten, und die bekanntlich immer eine eigenthümliche Elektricität haben, die Luftelektricität genau zu bestimmen. Wir liessen einen 240 Fuss (78 m) langen Draht isolirt aus der Gondel herab; er zeigte darauf an seinem oberen Ende — E.“ Das Vorzeichen der Elektricität prüften die beiden Gelehrten vermittelst eines mitgenommenen Elektrophors, welches sie kurz vor der Abfahrt durch Reiben schwach geladen hatten; bei mehrfacher Abänderung des Prüfungsverfahrens fanden sie immer ihr erstes Ergebniss bestätigt, dass die Elektricität negativ war. Man darf wohl mit Recht annehmen, dass die durch den Draht zur Gondel geleitete Elektricität im Wesentlichen von jenen Wolken herrührte, dass letztere also — elektrisch waren.

Tissandier[57]) verliess Paris am 16. Februar 1873 Vormittags 11^h 20^m, drang in 1200 m Höhe in eine dichte Wolkenschicht ein, hatte dieselbe aber schon 10 Minuten nach der Abfahrt durch-

... und schwebte nun, unter tiefblauem Himmel, oberhalb eines wahrhaften Plateaus von gerundeten Cumulus. Etwa 3 Stunden lang blieb er ungefähr 400 m über dieser Wolkenschicht. Hier oben in 1400 bis 2000 m herrschte ein sehr warmer Luftstrom von anderer Richtung als unten, seine Temperatur war 17,5°. Um $1^h 20^m$ wurde ein 200 m langer, unten zugespitzter Kupferdraht aus der Gondel herabhängen gelassen; er war oben durch ein Kautschukrohr isolirt und endete in eine Kugel. Als der letzteren ein Elektroskop genähert wurde, divergirten die Goldblättchen heftig. Mit Hilfe einer Siegellackstange wurde constatirt, dass die auftretende Elektricität n e g a t i v war. Dies stimmt also mit Biots Beobachtung überein.

Um $2^h 15^m$ wurde der Ballon etwas sinken gelassen (bis 1350 m), so dass der Draht in's Innere der Wolken eintauchte, jetzt liessen sich mit dem Finger Funken aus der Kugel ziehn, die den Vorderarm merklich erschütterten. So war es während einer halben Stunde, nämlich solange der Draht in den Wolken war. Als der Ballon um $2^h 25^m$ (in 1200 m) ganz in's Innere von Wolken eindrang, sank die Temperatur auf — 2°. „Weisse opalisirende Dünste machten den über dem Nachen schwebenden Ballon unsichtbar, und reichlicher Rauhreif bedeckte das Tauwerk; auch der Draht bedeckte sich fast augenblicklich mit einer dicken Lage von Eisflittern. Diese kleinen Krystalle fielen n i c h t aus den umgebenden Dünsten, sondern schienen auf den Wänden des Nachens, auf Kleidern und im Bart von selbst zu entstehen.“ Diese Beschreibung macht es wahrscheinlich, dass die Wolke aus überkälteten Wassertheilchen bestand, welche bei der Berühruug mit irgendwelchen festen Körpern sofort krystallisirten. Ob diese Beschaffenheit aber auch jener Wolke zukam, deren Elektricität als negativ erkannt war, bleibt zweifelhaft, denn in der Zwischenzeit von $1^h 20^m$ bis $2^h 25^m$ hatte der Ballon in horizontaler Richtung etwa 4 geogr. Meilen zurückgelegt und war den grössten Theil dieser Zeit in dem oberen warmen Luftstrom, der andere Strömungsrichtung als der untere besass, gewesen. Die Niederkunft erfolgte in Montireau, 120 km von Paris, $3^3/_4$ Stunden nach der Abfahrt.

Im Gegensatz zu diesen auf Luftreisen angestellten Beobachtungen über den Charakter der Wolkenelektricität haben alle Beobachtungen in W o l k e n, welche das Observatorium auf dem Vesuv einhüllten, nach Palmieri stets nur + E. ergeben.

Auch Saussure und Schübler, welche im Hochgebirge Gelegenheit hatten, in den Wolken selbst Beobachtungen anzustellen, fanden fast stets + E. Hiermit stimmt es überein, dass nach Angabe verschiedener Beobachter dichter Nebel, d. i. ja nichts Anderes als eine den Beobachter einhüllende Wolke, stets + ist.

Endlich erweist sich Schnee fast ausnahmslos positiv. Dies bezeugen Dellmann [58]), Everett u. A.; auch Lephay fand am Cap Horn, dass das Fallen von Schneestaub und kleinen Eiskrystallen bedeutende + Spannung und Funken am Instrument erzeugte. Everett äussert sich über diese Erscheinungen folgendermassen: „Das durchschnittliche Schön-Wetter-Potential ist in Windsor (Neu-Schottland) gleich 4 (willkürlichen) Einheiten. Bei nassem Wetter, besonders mit plötzlichen schweren Schauern, war es oft = ± 20 bis ± 30, und es war reichlich so stark während des Hagels. Bei Schnee war die durchschnittliche Stärke ungefähr dieselbe wie bei schwerem Regen, aber weniger veränderlich und fast stets +. Gelegentlich, wenn starker Wind den Schnee begleitete während sehr strengen Frostes, war es + 80 bis + 100 oder noch höher. Bei Nebel war es immer +, durchschnittlich ungefähr + 10.“

Um so merkwürdiger ist es, dass bei Hagel keineswegs immer + E. beobachtet wird, sondern bald — E., bald + E., und zwar wie es scheint mit Ueberwiegen der — E. In einem ersten Bericht über seine Beobachtungen in Windsor führt Everett zwei Tage an, an denen die Luft-E. während des Hagels beobachtet wurde; beide Mal trat + E. und — E. hervor, jedoch mit bedeutendem Vorwalten der letzteren. An einem anderen Tage war die Luft-E. während des Schlossens +, wieder an einem anderen Tage wechselte dabei schwache + E. mit schwacher — E. Dellmann [59]) hat ebensolche Resultate erhalten. In einem zweiten Bericht über fortgesetzte Beobachtungen in Windsor berichtet Everett von starker + E. bei einem Hagelgewitter und ein anderes Mal von besonders starker — E. bei Schlossen. Lephay beobachtete bei Hagel stets ungemein starke — Spannungen.

So viel über das Thatsächliche der Luftelektricität. Die Erwägungen, welche geeignet scheinen, das Verständniss derselben einigermassen zu vermitteln, sind folgende: Es ist Thatsache, dass sehr oft zwei oder mehr Luftströme von verschiedener Richtung übereinander fliessen; dem Beobachter an der Erdoberfläche verrathen sie sich gelegentlich durch den verschiedenen

Wolkenzug, bei Luftreisen sind sie häufig unmittelbar wahrgenommen worden. Bei letzteren Gelegenheiten ist auch ermittelt, dass sie meistens sehr verschiedene Temperatur besitzen. Sobald nun der eine von zwei aneinander hinfliessenden Luftströmen Eistheilchen mit sich führt, der andere Wassertheilchen, so muss, nach den Ermittelungen des vierten Abschnitts, wegen der Reibung der Wassertheilchen an den Eistheilchen Erregung von Elektricität die Folge sein: die Eistheilchen werden positiv, die Wassertheilchen negativ elektrisch. Welcher von den beiden Strömen oberhalb des anderen fliesst, das lässt sich nicht allgemein angeben. Da aber die Temperatur durchschnittlich nach oben abnimmt, so wird in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle der Eisstrom als oberhalb des Wasserstroms fliessend vorausgesetzt werden dürfen. Daraus folgt, dass man, bei einer schematisch vereinfachten Betrachtung, als Grenze beider Ströme die Isothermfläche Null annehmen darf, oberhalb deren sich also positive, unterhalb deren sich negative Elektricität entwickelt. Nun gelangen natürlich die Wassertheilchen, da sie den minder hoch fliessenden Luftströmen angehören, im Allgemeinen früher zur Erde (in der Gestalt von Regen) als die Eistheilchen der oberen Ströme mit ihrer + E. Indem die Regentropfen ihre — E. an die Erde abgeben, so muss die Erdoberfläche negativ elektrisch werden, und sie muss auch negativ bleiben, weil dieser Process sich unaufhörlich wiederholt. In den höheren Luftschichten aber muss die + E. der geriebenen Eistheilchen vorwiegen. Mit Rücksicht hierauf ist man berechtigt, die Isothermfläche Null, obgleich an ihr beide Arten von Elektricität entstehen, doch als überwiegend positiv elektrisch anzusehn.

Um Einwürfen gegen diese Betrachtungen zu begegnen, seien noch zwei Punkte hervorgehoben. Zunächst beachte man, dass sich in den Höhen der Atmosphäre immer von Neuem elektrisch neutrales Material bildet, bereit, durch Reibung elektrisch zu werden. Denn wenn auch die Erde negativ elektrisch ist, so müssen doch die von den Gewässern der Erde aufsteigenden Dämpfe unelektrisch sein, wie Blakes [60]) Versuche beweisen.

Ferner halte man sich gegenwärtig, dass die in der Höhe elektrisch gewordenen Theilchen ihre Elektricität keineswegs schnell verlieren, denn als Hauptursache der Elektricitäts-Zerstreuung bei unseren Laboratoriumsversuchen sind, wie aus Nahrwolds [61]) Untersuchungen klar hervorgeht, die Staubtheilchen

unserer Luft anzusehen, und durch diese werden die höheren Luftschichten weit weniger verunreinigt als die tieferen. Die Feuchtigkeit der Luft aber bedingt nach Warburg [62]) keineswegs eine leichtere Zerstreuung der Elektricität. (Das scheint nur so bei unseren Versuchen, weil die isolirenden Stützen durch Feuchtigkeitsüberzug leitend werden.)

Die Reibung von Wasser und Eis in den übereinander fliessenden Luftströmen ist übrigens nicht die einzige Quelle der Luftelektricität. Sobald Nebel oder Gewölk, mögen sie nun aus Wasser- oder aus Eistheilchen bestehen, heftig reibend an der Oberfläche des Flachlandes oder des Gebirges hingetrieben werden, muss (nach den Ermittelungen des vierten Abschnitts) die Erde negativ elektrisch werden, die Wasser- oder Eistheilchen aber positiv. (Dagegen kann bei schwacher Bewegung wohl einfach die — E. der Erde den berührenden Wasser- und Eistheilchen mitgetheilt werden.) Es ist bemerkenswerth, dass diese Ursache in demselben Sinne wie die zuerst angeführte wirkt, soweit es die Elektrisirung der Erde betrifft, dass aber die Wassertheilchen der Wolken bei dieser Reibung die entgegengesetzte Elektricität erlangen als bei der in der Höhe stattfindenden Reibung an den Eistheilchen. Dieser Umstand trägt jedenfalls mit dazu bei, die Erscheinungen der Luft-E. so verwickelt zu machen.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Tröpfchenreibung am Boden (aber auch an den Wellenkämmen des Meeres!) kürzlich von Le Goarant de Tromelin [62a]) als einzige Ursache der Luft-E. hingestellt worden ist. — Dagegen scheint mir Herrn Hoppes [27]) Ansicht, dass sich die atmosphärische Elektricität durch die „bei der Verdampfung eintretende Reibung des Dampfes an den festen Theilen der Erdoberfläche“ bilde, nicht hinreichend begründet; denn seine über diese Elektricitätserregung angestellten Versuche (a. a. O. pag. 106) beweisen nach meiner Meinung nur die Reibung der bei plötzlicher Evacuirung entstehenden Nebeltheilchen an dem Schwamm, der sich unter dem Recipienten befand. Wenn auch die durch den Recipienten durchgesaugte Luft filtrirt war, so war darum die in dem Schwamm befindliche Luft nicht nothwendiger Weise auch filtrirt; (seine obere Seite war, während er mit der unteren in Wasser lag, fast ganz trocken, enthielt also viel Luft). Es lag hier wohl nur die bekannte Erscheinung der Elektrisirung durch Tröpfchenreibung an festen Körpern vor. Die Elektricitätserregung wurde ja bei

diesen Versuchen auch stärker, sobald statt filtrirter Luft gewöhnliche Luft, in der sich etwas Tabakrauch befand, benutzt wurde.

Ich wende mich nun dazu, die charakteristischen Züge der Luftelektricität, sowie die angeführten besonderen Erscheinungen, aus der Hypothese der Tröpfchenreibung, die hauptsächlich gegen die Eistheilchen in der Höhe, zum Theil aber auch gegen den Erdboden sich vollzieht, abzuleiten.

Um zunächst das Vorherrschen der + E., und zwar gerade bei schönem Wetter zu verstehen, ist es nützlich, sich gewisse bei Luftfahrten gewonnene Erfahrungen über die Anwesenheit von Eiskrystallen in der Luft gegenwärtig zu halten, worüber hier nur Folgendes nach Tissandier[63]) mitgetheilt werden mag. Am 22. März 1874 trafen Crocé-Spinelli und Sivel sowohl beim Aufsteigen als beim Absteigen in 5000 m sehr lockere Haufen von vereinzelt schwebenden Eiskrystallen. „Wir bemerkten jedes Mal 3 oder 4 Minuten lang unterhalb des Ballons Eisnadeln, 20 bis 40 cm voneinander abstehend, die so lebhaft in der Sonne glitzerten, dass sie ungeachtet ihrer Kleinheit bis auf 100 m sehr wohl sichtbar erschienen. Wir sahen sie weder über noch neben uns. Es ist gewiss, dass wir sie beim Abstieg durchschreiten mussten. Diese leichten Haufen schienen die Deutlichkeit der Linien des Bodens nicht zu vermindern.“

Bei der verhängnissvollen Fahrt, welche Tissandier, Crocé-Spinelli und Sivel am 15. April 1875 ausführten, bemerkten sie, in 4500 m Höhe schwebend, rings um sich einen weiten Kreis von Cirri. „Letztere nahmen bis 8000 m an Dicke zu und boten den Anblick compacter Massen von einem blendenden Silberweiss. Indessen in diesem Augenblicke war der Himmel kar und durchsichtig für Beobachter an der Erdoberfläche, wie mir mehrere Briefe von Bewohnern des Departements Loiret bewiesen haben, oberhalb dessen der Ballon in dem Augenblick schwebte, als er seine grösste Höhe, 8600 m, erreichte. Diese Wolken, aus sehr vereinzelt schwebenden Eiskrystallen gebildet, waren durchsichtig von unten nach oben bei ihrer verhältnissmässig geringen Dicke und wurden nur dem Aëronauten sichtbar, der mit ihnen in demselben Niveau sie horizontal unter erheblicher Dicke wahrnahm.“

Aus solchen Wahrnehmungen schliesst Tissandier, und gewiss mit Recht, dass die Gegenwart von Eiskrystallen etwas Gewöhnliches in der Atmosphäre ist. „Diese Eiskrystalle können

in den höheren Luftregionen existiren, ohne die Klarheit des Himmels für den Beobachter auf der Erde zu trüben."

Nun vergegenwärtige man sich die bei schönem Wetter herrschenden atmosphärischen Bedingungen. Anhaltend heiteres Wetter ist fast immer dadurch bedingt, dass der Beobachtungsort sich im Bereich einer Anticyklone, d. h. in einem Gebiet hohen Luftdrucks befindet. In einem solchen aber ist dauernd Luft im Herabsinken aus der Höhe begriffen. Die niedrigeren — elektrischen Wassertheilchen sind bereits zu Boden gesunken, nur die obere Luft mit ihren + elektrischen Eistheilchen, die freilich von der Erde aus für das Auge meist nicht bemerkbar sind, macht sich geltend. (Ob beim schliesslichen Verdampfen der Eiskrystalle die Elktricität an die Gase der Luft übergeht, resp. dem Wasserdampfe anhaftet, ist noch unausgemacht.) So versteht man die ausgeprägte + Schönwetter-Elektricität ohne Schwierigkeit. Aber auch bei anderen Wetterzuständen wird die + E. vorherrschen, denn immer befindet sich ja in der Höhe die Isothermfläche Null, die (wie oben auseinandergesetzt) durchschnittlich als + geladener Körper wirkt. Hierzu gesellt sich nun noch folgender Umstand. Die Erdoberfläche ist (nach Lamont, Peltier, W. Thomson u. A.) negativ elektrisch. Das folgt ja auch aus der hier vorgetragenen Theorie. Es ist somit bei Beobachtung mit dem Thomsonschen Elektrometer das zur Erde abgeleitete Quadrantenpaar nicht unelektrisch, sondern ebenfalls negativ. Daher erscheint ein Punkt der Atmosphäre als + elektrisch nicht nur dann, wenn in ihm wirklich + Spannung herrscht, sondern auch dann, wenn letztere negativ, aber minder stark als die der Erde ist.

Dass die Wolkenelektricität sich bei Luftfahrten als negativ herausgestellt hat, ist für die vorliegende Theorie selbstverständlich, wenigstens wenn die Wolken aus tropfbaren Theilchen bestanden. Letzteres war nun bei der Fahrt von Biot und Gay-Lussac sicher der Fall; und für die Tissandiersche Fahrt ist es zum Mindesten sehr wahrscheinlich, das die Wolken aus flüssigen, wenn auch überkälteten Theilchen bestanden. Dass sich dagegen die unmittelbar zugänglichen Wolken in Gebirgen, ebenso wie Nebel, fast ausnahmslos + zeigen, ist ebenso verständlich, weil ihre Bestandtheile in den meisten Fällen nicht Reibung gegen Eis, sondern gegen die festen Theile der irdischen

Gegenstände erfahren haben, wobei sie nach Faraday positiv werden mussten. Diese Betrachtungen machen auch einen merkwürdigen Ausspruch Dellmanns ohne Weiteres begreiflich, nämlich dass „der von unten kommende, also besonders bei heiterem Himmel auftretende Nebel immer + sei, während der von oben kommende, welcher niedersteigender Stratus sei, sich meist negativ zeige.“

Das von den meisten Beobachtern constatirte Auftreten von starker negativer E. bei Regen erweist sich als eine unmittelbare Folge der Theorie, weil ja in den meisten Fällen der Regen solche Wassertheilchen zur Erde herabführt, die durch vorangegangene Reibung an Eis negativ geworden waren. Für diejenigen Fälle, wo bei Regen + E. auftritt, sind mancherlei Ursachen denkbar. Sobald die Tropfen aus Theilchen gebildet sind, welche zuvor eine Reibung am Boden erfahren hatten, oder auch sobald sie aus geschmolzenen Eistheilchen bestehen, werden sie nicht negativ sein können; auch Influenz benachbarter negativer Objecte kann unter Umständen die Ursache von + E. des Regens sein.

Die in den meisten Fällen beobachtete + E. des Schnees ist wohl immer darauf zurückzuführen, dass Eis durch Reibung an Wasser und anderen Körpern + elektrisch wird.

Der Umstand, dass bei Hagelwetter bald positive, bald negative E. beobachtet wird, ist wohl auf dieselbe Ursache wie die vielfachen Wechsel im Vorzeichen der Elektricität bei Gewittern, d. h. wohl hauptsächlich auf Influenzwirkungen zurückzuführen. Die Hagelkörner selbst, wenn sie durch Tröpfchenführende Luft herabgefallen sind, müssen + sein. Wenn sie indessen den Sammelapparat des Elektrometers mit Heftigkeit treffen, so muss dieser durch die Reibung negativ werden. Vielleicht ist dies der Grund dafür, dass vorwiegend doch — E. bei Hagel beobachtet worden ist. Wenn übrigens Hagel aus plötzlich erstarrtem, überkältet gewesenem Wasser entstanden ist, welches durch frühere Reibung an Eis negativ geworden war, so muss er ebenfalls negativ sein.

Die ungemein grosse Veränderlichkeit in der Stärke der elektrischen Spannung, welche Everett mit der entsprechenden Veränderlichkeit des Winddrucks vergleicht, hat wohl auch wirklich Zusammenhang mit letzterem. Wenn der Wind in unregelmässigen Stössen elektrisirte Theilchen in der Höhe vorüberführt, und wenn die Vertheilung dieser letzteren, wie nothwendig angenommen werden muss, eine durchaus unregelmässige ist, so muss

eine grosse Unregelmässigkeit in den Angaben des Elektrometers die Folge sein. So beobachtete z. B. Lephay, dass sehr hohe Cirrocumuli bei ihrem Vorübergang über dem Elektrometer die + Spannung, welche durchschnittlich 50 bis 70 Volt betrug, bis auf 400 Volt erhöhten. Von grossem Einfluss müssen ferner die unzählbaren Mengen winzigster Theilchen sein, die in der das Elektrometer umspülenden Luft schweben. Jedes derselben, das mit dem Sammelapparat oder gar mit einem inneren Theil des Elektrometers in Berührung kommt oder sich wieder davon entfernt, muss dadurch einen Einfluss auf die Angaben des Instruments ausüben. Die gerade hiermit zusammenhängenden Unregelmässigkeiten, besonders das Auftreten von — E. bei Staubauftreibendem Winde, sind schon Dellmann[59a]) und anderen Beobachtern aufgefallen. Ganz abgesehen von der Reibung des Staubes muss schon die von ihm mitgenommene — E. der Erdoberfläche die + Angaben des Instruments nothwendig verkleinern.

Die meist beobachtete Zunahme positiver Spannung bei Erhebung in die Atmosphäre folgt unmittelbar aus der Theorie. Denn hierbei entfernt man sich von dem negativ geladenen Erdkörper und nähert sich der Isothermfläche Null, die überwiegend als + geladener Körper wirkt. Setzt man nun aber die Erhebung bis über die Isothermfläche Null fort, so muss die + Spannung allmählich wieder abnehmen. Gerade dies ist es, was Glaishers einzige elektrische Beobachtungsreihe in grossen Höhen wirklich ergeben hat.

Die Jahresperiode der Luft-E. ist in ihren allgemeinen Zügen leicht zu verstehen. Im Sommer steigt die Isothermfläche Null am höchsten, also ist der Einfluss der oberhalb derselben befindlichen positiv elektrisirten Eistheilchen am geringsten. Die gewöhnliche, im Allgemeinen positive Luft-E. muss also jetzt am schwächsten erscheinen. Dass nun gerade jetzt die unperiodischen Erscheinungen starker Elektricität, die Gewitter, am häufigsten sind, ist ein deutlicher Beweis dafür, dass die Gewitter-Elektricität unmöglich lediglich aus der gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre abgeleitet werden kann, wie man wohl versucht hat, indem man sich vorstellte, die vermöge der gewöhnlichen Luft-E. äusserst schwach elektrischen Tröpfchen erhielten beim Zusammenfliessen hinreichende elektrische Spannung, um Blitze zu erzeugen. Die Gewitter-Elektricität entspringt vielmehr, wie auseinandergesetzt

worden, aus der Reibung von vorzugsweise verticalen Luftströmen, die allgemeine Luftelektricität mehr aus der Reibung horizontaler Luftströme.

Mit zunehmender Annäherung an die Winterszeit nähert sich die Isothermfläche Null der Erdoberfläche mehr und mehr, bis sie sie schliesslich erreicht und in's Erdinnere dringt. Bei diesem Herabsinken muss die atmosphärische Elektricität wachsen, wie es wirklich beobachtet ist. In naher Verwandtschaft mit dieser Vorstellung führt auch Dellmann[56a]) die Zunahme der Luft-E. nach dem Winter hin darauf zurück, dass dann die Wolken tiefer schweben. Ist die Isothermfläche Null in's Erdinnere eingetreten, so sind nur noch Eistheilchen in der Luft, und diese sind entweder durch frühere Reibung an Tröpfchen +, oder sie werden es durch Reibung an der Erdoberfläche. Letztere Ursache tritt namentlich bei stürmischem Wetter in Kraft, und sie kann so starke Elektrisirung der Schneetheile bewirken, dass die Influenzelektricität, aus Spitzen ausströmend, als St. Elmsfeuer erscheint, welches ja gerade unter den erwähnten Umständen am häufigsten gesehen wird.

Um die Tagesperiode der Luft-E. zu begreifen, erinnere man sich, dass sie nahezu mit derjenigen des Luftdrucks identisch ist. Letztere hängt nun zweifellos mit dem Vorgange zusammen, dass bei der Tageserwärmung eine allgemeine Auflockerung der Luft und ein seitliches Abfliessen in der Höhe stattfindet, während sich bei der nächtlichen Abkühlung der entgegengesetzte Vorgang vollzieht. In Uebereinstimmung hiermit muss also auch eine Auf- und Abbewegung der Isothermfläche Null stattfinden, wie wir sie ja im ersten Abschnitt durch die Beobachtungen von Luftfahrern wirklich deutlich angezeigt gefunden haben. In den ersten Nachmittagsstunden, wenn die Erwärmung des Bodens am stärksten, ist auch dieser (fälschlich so genannte) aufsteigende Strom am stärksten; dann ist die Isothermfläche Null mit ihren + elektrisirten Eistheilchen am weitesten von der Erdoberfläche entfernt, also auch die vom Elektrometer angezeigte + E. der Luft am geringsten. In der Morgenfrühe dagegen ist die Isothermfläche Null am tiefsten gesunken, folglich ist jetzt die + E. der Luft am stärksten. Auf diesen Zusammenhang ist schon Dellmann aufmerksam geworden, denn er betont, dass das erste tägliche Maximum der Luft-E. bald nach dem Minimum der Temperatur, das erste tägliche Minimum der Luft-E. bald nach dem Maximum

der Temperatur eintritt. So sind also wenigstens die beiden ausgeprägtesten Tagesextreme der Luft-E. begreiflich geworden.

Hiermit glaube ich die wesentlichsten Züge der atmosphärischen Elektricität in möglichst einfacher und ungezwungener Weise durch die Grundhypothese „der Reibung von Tröpfchen, theils an Eistheilchen in der Höhe, theils an der Erdoberfläche", erklärt zu haben, gestehe aber gleichwohl gerne zu, dass hiermit das letzte Wort über die Luftelektricität noch nicht gesprochen ist.

Nachtrag.

(Zu Seite 34.)

In allerjüngster Zeit sind zufällig zwei Luftfahrten an einem und demselben Gewittertage ausgeführt worden. Zeitungsnachrichten zufolge stieg am 10. Mai 1885 Nachmittags 6^h 5^m der Luftfahrer Richard Opitz in Begleitung des Hauptmann John, Führers des Ballon-Captif-Detachements, von der Hasenhaide bei Berlin auf. Durch gefällige briefliche Mittheilung des letzteren Herrn erfuhr ich über diese Fahrt Folgendes. Die Temperatur stieg vom Boden aus, wo sie $21^1/_4$ ⁰ C. betrug, mit zunehmender Höhe und erreichte bei 1137 m $28^3/_4$ ⁰ C. Oberhalb Stralau wurden die Reisenden durch den Donner auf ein über Charlottenburg stehendes Gewitter aufmerksam, welches in einer Breite von etwa einer deutschen Meile mit grosser Geschwindigkeit von West nach Ost zog. Darauf kam mit dem Schatten einer grossen Wolke, die in losem Zusammenhang mit dem Gewitter stand, ein kühler Luftstrom von $21^1/_4$ ⁰ C., wodurch der Ballon sank. Die Niederkunft erfolgte 37 Minuten nach der Abfahrt unweit Biesdorf; 10 Minuten danach brach der Gewittersturm und Regen los.

Wenn es hiernach scheinen könnte, als seien die im dritten Abschnitt erörterten Bedingungen bei diesem Gewitter nicht erfüllt gewesen, da ja eine Temperaturzunahme nach oben stattfand, so lehrt dagegen eine weitere Zeitungsnachricht, dass an demselben Abend um 7^h der Luftschiffer Lattemann von Charlottenburg aus aufstieg und nach $^3/_4$ stündiger Fahrt, die durch eine Schneewolke führte und ihn völlig mit Schnee bedeckte, hinter Blumberg bei Bernau landete. In diesem Falle scheint also ein Gewitter der zweiten Art stattgefunden zu haben, bei dem warme (Tröpfchen führende) und kalte (Eis führende) Luftströme von mehr horizontaler Richtung gleichzeitig vorhanden waren.

Erste Beilage.

Einige bei Luftreisen beobachtete Temperaturen.

Alle Temperaturen nach der 100 theiligen Skala, alle Höhen in Metern.

Aus den zum Theil sehr umfangreichen Tabellen, in denen verschiedene Luftfahrer ihre Beobachtungen niedergelegt haben, sind im Folgenden für jede Fahrt vorzugsweise wiedergegeben: die Temperatur am Boden und im höchsten erreichten Punkte, die tiefste beobachtete Temperatur, endlich jene Höhen, in denen ungefähr der Eispunkt angetroffen wurde. Wo Angaben darüber vorlagen, sind auch die zugehörigen Zeiten und einige Geschwindigkeiten der verticalen Bewegung aufgeführt.

Gay Lussac stieg in Paris am 16. September 1804 Vormittags 9^h 40^m auf.

Meereshöhe.	Temperatur.
	° C.
Boden	27,75
5714 m	+ 0,5
6080	— 3,0
6146	— 1,5
5671	0,0
6182	— 3,25
7016	— 9,5
Um 3^h 45^m Nachm. am Boden	+ 30,75

Barral und Bixio machten ihre berühmte zweite Fahrt am 27. Juli 1850 Nachmittags 4^h 3^m von Paris aus. Der Himmel war bis Mittag sehr rein gewesen, hatte sich dann mit

Wolken bedeckt, und ein Platzregen war herabgestürzt. Um 3^h hatte es zu regnen aufgehört.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur.	Geschw. m pro Minute.
	m	°C.	
4^h 6^m pm	757	16,0	
13	2013	9,0	248 ↑
20	3751	— 0,5	
	5121	— 7,0	
25	6330 bis	—10,5 bis	
	5902	— 9,8	
45	6512	—35,0	
50	7049	—39,67	
5 2	4502	— 9	
7	3688	— 7	
12	2452	— 1	
14	2185	0	133 ↓
30	Boden		

John Welsh machte von den königlichen Vauxhall-Gärten in London aus vier Luftfahrten, alle im Jahre 1852.

Als Temperatur am Boden nahm er die an mehreren benachbarten Stationen zur Zeit der Abfahrt beobachtete Lufttemperatur.

Fahrt am 17. August 1852
Nachmittags.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
3^h 49^m pm	Boden	21,88	
52	744 m	17,11	
4 4	2429	9,89	
23	3962	0,94	143 ↑
24	4106	— 0,94	
$46^1/_2$	5907	— 12,94	
5 $^1/_2$	3505	0,00	180 ↓
20	Boden	20,94	

Fahrt am 26. August 1852
Nachmittags.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
4^h 43^m pm	Boden	20,07	
47	216 m	18,06	
5 6	2332		
$6^1/_2$		5,28	
7	2499		
$44^1/_2$	3749	0,78	9 ↑
46	3767	— 0,39	
6 55	5599	— 10,89	
59	5822	— 10,22	
7 35	Boden	+ 16,28	

Fahrt am 21. October 1852 Nachmittags.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
2^h 45^m pm	Boden	14,83	
52	704 m	9,61	
3 $1\frac{1}{2}$	1262	11,28	
19	3246	0,17	76 ↑
20	3322	— 0,11	
27	3795	— 3,44	
29	3853	— 2,94	
$33\frac{5}{6}$	3341	— 0,67	125 ↓
36	3069	+ 1,44	
4 20	Boden	13,56	

Fahrt am 10. November 1852 Nachmittags.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
2^h $21\frac{3}{4}{}^m$ pm	Boden	9,83	
$22\frac{1}{2}$	73 m	9,78	
32	1631	0,94	
35	1981	2,11	
39	2566	0,28	143 ↑
40	2710	— 0,33	
3 13	6818	— 23,61	
$14\frac{1}{2}$	6901	— 22,72	
40	Boden	+ 9,61	

Von James Glaishers zahlreichen Luftfahrten mögen hier nur 13 besonders hoch geführte berücksichtigt werden.

Fahrt am 17. Juli 1862 Vormittags von Wolverhampton (149 m üb. d. Meeresspiegel) aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
9^h 42^m am	149 m	15,00	
49	1361	6,11	
53	2432	0,28	26 ↑
54	2458	— 0,11	
10 3	3874	— 3,33	
15	5155	0,00	92 ↑
35	5924	5,67	
44	5894	1,11	91 ↑
47	6168	— 0,28	
11 1	7979	— 8,89	
37	4963	— 1,28	1192 ↓
38	3771	+ 1,22	

Rückkunft nach 11^h 40^m

Fahrt am 18. August 1862 Nachmittags von Wolverhampton (149 m über Meer) aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
1^h $2\frac{1}{2}{}^m$ pm	149 m	19,89	
15	2349	7,61	
17	2723	6,67	
2 24	4222	1,17	151 ↑
29	4979	— 2,33	
3 7	6920	— 4,44	
$19\frac{3}{4}$	6587	— 4,00	128 ↓
34	4060	+ 0,44	
4 5	Boden	19,44	

Fahrt am **21. August 1862** Vormittags von Hendon (98 m über dem Meeresspiegel) aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
4h 30m am	98 m	16,00	
5 10	2380	3,06	
11	2524	2,89	
16	3074	0,44	76 ↑
17	3150	— 0,06	
34½	4229	— 7,06	
47	4369	— 2,44	
6 17	3421	0,00	59 ↓
6 24	2451	6,11	
7 10	Boden	16,56	

Fahrt am **5. September 1862** Nachmittags von Wolverhampton (149 m über Meer) aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
1h 3m pm	149 m	15,28	
17½	2309	4,17	
21	3025	0,06	258 ↑
22	3283	— 0,44	
53	8839	— 20,56	
2 16⅚	3069	— 0,50	179 ↓
19	2682	+ 1,22	
3 6	Boden	14,00	

Fahrt am **31. März 1863** Nachmittags vom Krystallpalast in Sydenham aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
4h 11m pm	Boden	9,89	
29	2303 m	0,06	134 ↑
32	2704	— 1,94	
5 27	6975	— 17,78	
6 23	485	— 0,28	101 ↓
30	Boden	+ 5,56	

Fahrt am **18. April 1863** Nachmittags vom Krystallpalast in Sydenham aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
1h 16m pm	Boden	16,39	
29	3167 m	0,00	458 ↑
—	7365	— 11,94	
2 48	Boden	+ 13,89	

Fahrt am **26. Juni 1863** Nachmittags von Wolverton aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
1h 3m pm	Boden	18,89	
15⅓	2690 m	2,22	250 ↑
16½	2834	— 0,44	
26	4857	— 1,67	59 ↑
29¾	5025	+ 1,67	
54⅚	7071	— 8,33	
2 12	5002	0,00	111 ↓
14¼	4593	+ 0,56	
17	3203	+ 0,56	
29	Boden	19,17	

Fahrt am **31. August 1863** Nachmittags v. Newcastle-on-Tyne aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.
6h 7m pm	Boden	17,78
12	60 m	13,33
14⅓	338	12,33
25	2301	0,83
27	2374	1,11
29½	2449	1,11
32½	2411	1,11
7 5	Boden	11,94

Fahrt am 29. September 1863 Vormittags von Wolverhampton (149 m über Meer) aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
7h 42m am	149 m	8,89	
8 2	1829	0,11	35 ↑
3	1864	— 0,28	
9 33	5057	— 17,78	
10 9	2254	— 0,56	272 ↓
11	1711	+ 1,39	
30	Boden	> + 10	

Fahrt am 9. October 1863 Nachmittags vom Krystallpalast in Sydenham aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
4h 27m pm	Boden	12,50	
39	1742 m	0,00	68 ↑
46	2226	— 1,67	
52½	1707	0,00	433 ↓
5 38	587	+ 7,22	
50	1857	+ 0,28	67 ↑
51	1923	— 0,44	
6 0	2656	— 3,06	
40	Boden		

Fahrt am 12. Januar 1864 Nachmittags von Woolwich aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
2h 7m pm	Boden	5,39	
10	405 m	3,61	
18	613	6,67	
26	916	6,94	
34	1806	0,11	134 ↑
34½	1873	— 0,28	
3 31½	3626	— 11,67	
56¼	1363	— 0,28	304 ↓
56½	1287	+ 0,11	
4 9½	Boden	5,44	

Fahrt am 6. April 1864 Nachmittags von Woolwich aus.

Zeit.	Meereshöhe.	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
4h 9m pm	Boden	7,50	
19	1184 m	0,00	115 ↑
29	2284	+ 4,56	
34	2705	1,22	
37	3376	2,50	
38	3349	3,89	
40	3051	7,78	
54	1165	5,00	
56	878	3,94	
5 25	Boden	8,33	

Fahrt am 29. Aug. 1864 Nachm. vom Krystallpalast in Sydenham aus.

Zeit.	Meereshöhe. m	Temperatur. °C.	Geschw. m pro Minute.
4h 6m pm	Boden	22,50	
27	2436	9,39	
28½	2507	7,22	
39	3893	0,44	
47½	4364	1,94	
54½	4293	0,00	49 ↑
57	4264	— 1,94	
5 3	3921	[illegible]	22[illegible]
7	3031	[illegible]	
14	2483	[illegible]	
32	Boden	[illegible]	

Flammarion verliess Paris am 15. April 1868 um $3^h 15^m$ Nachmittags bei lebhaftem Wind und regendrohenden Wolken. Am Boden war die Temperatur 15° C., in 1300 m war sie auf 2° gesunken, in 3000 m betrug sie — 7°.

Gaston Tissandier verliess mit Sivel und Crocé-Spinelli zusammen Paris am 15. April 1875 Vormittags. Letztere Beide starben in der Höhe.

Zeit.			Meereshöhe.	Temperatur.
11^h	35^m	am	Boden	14,0° C.
	40		3200 m	1,0
12	15		3698	2,0
			4387	0,0
12	51		4700	0,0
			5210	— 5,0

W. de Fonvielle stieg am 2. Mai 1875 Nachmittags um 2^h in Paris auf und fand in

1450 m	+ 12°
3150	— 1
3200	— 2
2800	— 3

G. Rodeck, ein Luftfahrer von Profession, stieg am 30. Juni 1884 Abends $^1/_2$ 10^h in Dresden auf, bei Mondschein und ruhigem, schönem Wetter. Schon in 2640 m fand er $2^1/_2$° unter Null (wahrscheinlich nach der 80theiligen Skala).

Zweite Beilage.

(Vergl. Seite 15 und 16.)

Temperaturabnahme mit zunehmender Höhe nahe vor dem Ausbruch eines Gewitters; nach Beobachtungen der meteorologischen Stationen Freiburg im Breisgau und Höchenschwand auf dem Schwarzwald in den Jahren 1880 und 1881.

Höchenschwand liegt 1012 m hoch, in 47° 44′ nördl. Br. u. 25° 55′ östl. L. v. Ferro. Freiburg 293 m hoch, in 48° 0′ nördl. Br. u. 25° 31′ östl. L. v. Ferro. Im Folgenden ist für jeden der 17 Fälle angegeben das Datum und der dem Gewitter zunächst vorhergegangene Beobachtungstermin; die zu diesem Termin abgelesenen Temperaturen und die daraus folgende Temperaturdifferenz beider Stationen; der Zeitpunkt der Erscheinung (G. = Gewitter, W. = Wetterleuchten); endlich in der

letzten Colonne die für jenen Termin angenommenen Normalwerthe der Temperatur (die Ableitung der letzteren ist auf Seite 15 angegeben) und ihre Differenz für beide Stationen.

Ort.	Datum und Termin.	Temperatur. °C.	Zeitpunkt der Erscheinung.	Datum und Termin.	Temperatur. °C.	Zeitpunkt der Erscheinung.	Normal-Temperatur °C.
Freiburg	16. Mai	23,3	$2\frac{1}{2}^h$ pm G.				16,48 } 2^h
Höchen-	1880	17,2	6—9 G.				10,80
schwand	2^h pm	6,1					5,68
Freiburg	3. Juni	24,0	2—3^h pm G.	5. Juni	26,1	9^h pm G.	21,07 } 2^h
Höchen-	1881	13,0	? W.	1881	19,2	6^h—Nachts G.	15,46
schwand	2^h pm	11,0		2^h pm	6,9		5,61
Freiburg	30. Juni	23,0	11^h pm G.				16,85 } 9^h
Höchen-	1880	16,2	Nachts G.				11,46
schwand	9^h pm	6,8					5,39
Freiburg	6. Juli	31,3	7—8^h pm G.	26. Juli	31,2	$4\frac{1}{2}^h$ pm G.	22,55 } 2^h
Höchen-	1881	24,4	4—$6\frac{1}{2}$ G.	1880	23,6	5 G.	17,08
schwand	2^h pm	6,9		2^h pm	7,6		5,47
Freiburg	16. Juli	25,5	9^h pm W.	19. Juli	23,0	10^h pm W.	18,48 } 9^h
Höchen-	1881	19,8	? W.	1880	19,4	$10\frac{1}{2}$ G.	13,23
schwand	9^h pm	5,7		9^h pm	3,6		5,25
Freiburg	19. Juli	28,3	Nachts W.	20. Juli	23,3	9^h pm W.	18,48 } 9^h
Höchen-	1881	24,6	? W.	1880	17,2	Abends W.	13,23
schwand	9^h pm	3,7		9^h pm	6,1		5,25
Freiburg	21. Juli	19,1	Nachts G.	22. Juli	18,5	Abends W.	18,48 } 9^h
Höchen-	1881	15,9	$6\frac{1}{2}$ pm bis	1880	11,3	? W.	13,23
schwand	9^h pm	3,2	Morgens G.	9^h pm	7,2		5,25
Freiburg	20. Aug.	25,0	2^h pm G.				22,26 } 2^h
Höchen-	1880	19,5	8 W.				16,83
schwand	2^h pm	5,5					5,43
Freiburg	21. Aug.	18,5	9^h pm W.				18,25 } 9^h
Höchen-	1881	12,6	? W.				13,12
schwand	9^h pm	5,9					5,13
Freiburg	5. Sept.	27,6	Abends W.				18,32 } 2^h
Höchen-	1880	22,0	$3\frac{1}{2}$ pm G.				13,19
schwand	2^h pm	5,6					5,13
Freiburg	19. Sept.	17,3	7—8^h am G.				13,19 } 7^h
Höchen-	1881	13,3	Abends G.				9,53
schwand	7^h am	4,0					3,66
Freiburg	7. Octbr.	15,1	Abd. bis nach				9,48 } 9^h
Höchen-	1880	10,2	Mittern. G.				5,35
schwand	9^h pm	4,9	Bald nach				4,13
			Mittern. G.				

Mit Hilfe dieser Tafel ist nun die folgende gebildet, welche übersichtlich zeigt, wie gross in jedem Falle der Ueberschuss der nahe vor dem Gewitter vorhandenen Temperaturabnahme nach oben über die normale gewesen ist.

Datum.	Temperaturdifferenz vor dem Gewitter	Temperaturdifferenz normale	Ueberschuss üb. die normale Differenz.
	° C.	° C.	° C.
16. Mai 1880. 2h pm	6,1	5,68	+ 0,42
3. Juni 1881. 2	11,0	5,61	+ 5,39
5. „ 1881. 2	6,9	5,61	+ 1,29
30. „ 1880. 9	6,8	5,39	+ 1,41
6. Juli 1881. 2	6,9	5,47	+ 1,45
26. „ 1880. 2	7,6	5,47	+ 2,13
16. „ 1881. 9	5,7	5,25	+ 0,45
19. „ 1880. 9	3,6	5,25	— 1,65
19. „ 1881. 9	3,7	5,25	— 1,55
20. „ 1880. 9	6,1	5,25	+ 0,85
21. „ 1881. 9	3,2	5,25	— 2,05
22. „ 1880. 9	7,2	5,25	+ 1,95
20. Aug. 1880. 2	5,5	5,43	+ 0,07
21. „ 1881. 9	5,9	5,13	+ 0,77
5. Sept. 1880. 2	5,6	5,13	+ 0,47
19. „ 1881. 7 am	4,0	3,66	+ 0,34
7. Oct. 1880. 9 pm	4,9	4,13	+ 0,77
Summa:	100,7	88,21	+ 12,49
Mittel:	5,92	5,19	+ 0,73

Literatur-Nachweis.

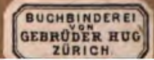
1. James Glaisher hat die Ergebnisse seiner wichtigsten Luftfahrten mitgetheilt in den Reports of the 32. 33. 34. Meeting of Brit. Association, held 1862, 1863, 1864. Im letzten dieser drei Bände, pag. 276 und 277 finden sich die Haupttabellen über die Temperaturabnahme.
2. Flammarion in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences Bd. 66 pag. 1113. 1868.
3. Luftreisen von Glaisher, Flammarion, Fonvielle u. Tissandier. Aus d. Französ. Eingeführt durch H. Masius. Leipzig 1872. pag. 181 und 166 Flammarion, pag. 243. Tissandier.
4. Gaston Tissandier in den Compt. rend. 77 pag. 839. 1873, und 80 pag. 1060. 1875.
5. W. de Fonvielle in den Compt. rend. 80 pag. 1172. 1875.
6. Rodecks Fahrt in der Wochenschrift „Daheim" 1884, erste Beilage zu Nr. 43.
7. Barral u. Bixios Reisetagebuch in Aragos Werken, deutsch von Hankel, Bd. 9 pag. 406 ff.
8. John Welsh in Philosoph. Transactions. 1853 pag. 311.
9. Gay-Lussac in Gilberts Annalen d. Physik XX. pag. 26. 1805.
10. Diese Fahrt citire ich nicht nach dem Original Rep. Brit. Assoc. 1865, sondern nach den Fortschritten der Physik im Jahre 1865, dargestellt von der physik. Ges. z. Berlin, pag. 578.
11. Ueber die angeblichen Donnerschläge bei Glaishers Fahrt am 18. August 1862 vgl. Rep. of the Meeting of Brit. Assoc., held 1862, pag. 490 unten.
12. Glaishers Fahrt am 31. Aug. 1863 in den Rep. Brit. Assoc., held 1864, pag. 200, 254 und 266.
13. Flammarion in Compt. rend. 66 pag. 1207. 1868.
14. Ludwig Friedrich Kämtz: Lehrb. d. Meteorologie. 1831?—36. Im ersten Bd. pag. 385 ff. finden sich seine Messungen von Wolkenhöhen, im zweiten Bd. pag. 426 die Bemerkungen über die Lufttemperatur vor dem Gewitter, ibidem pag. 468, 519 über Bewölkung beim Gewitter, im dritten Band 1836, pag. 120 desgleichen; sodann pag. 126 die Angaben über Höfe, pag. 92, 115, 116 die Bemerkungen über Unterscheidung der Wolken durch die in ihnen erscheinenden Höfe.
15. F. Vettin. Die Luftströmungen über Berlin; in d. Zeitschr. d. Oesterr. Ges. f. Meteorologie. Bd. 17. 1882. pag. 267 ff.
16. Charles Ritter im Annuaire de la Société météorolog. de France 1880. (Ztschr. Oest. Ges. f. Met. 1881. Bd. 16 pag. 494.)
17. W. de Fonvielle in Compt. rend. 81. 1875. pag. 106.

18. Fraunhofer in Schumachers astronomischen Abhandlungen III. pag. 75.
19. Galle: Ueber Höfe und Nebensonnen, in Poggendorfs Annalen Bd. 39 pag. 1 u. 241. 1840.
20. Bravais in Poggendorfs Annalen. Erg. Bd. 2 pag. 500; im Journ. de l'école polytechn. T. 18 (1847) und anderwärts.
21. E. Reusch in Poggend. Annal. 121 pag. 573. 1864.
22. F. Aragos sämmtliche Werke, deutsch von Hankel. Bd. 9. 1859. pag. 389; die Polarisation der Höfe ibid. pag. 80.
23. Die Nordpolarreisen A. E. Nordenskjölds 1858—1879. Aus dem Englischen. Leipzig 1880. pag. 196 ff.
24. J. Silbermann in den Compt. rend. 58 pag. 337. 1864.
25. Mohn. Grundzüge der Meteorologie. 2. Aufl. 1879. pag. 310.
26. E. Gerland: Ueber die Entstehung der Elektricität bei Gewittern, in der Elektrotechnischen Zeitschrift. Berl. 1884. pag. 292.
27. E. Hoppe: Ueber atmosphärische und Gewitter-Elektricität, in der (Deutschen) Meteorologischen Zeitschrift. Berlin 1885. pag 1 und 100.
28. Th. Reye. Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen. Hannover 1872. pag. 39 u. ff., 25, 60, 85, 44.
29. J. Hann in d. Zeitschr. d. Oesterreich. Gesellsch. f. Meteorologie. 9 pag. 328. 1874.
30. H. Hertz: Graphische Methode zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft, in der (Deutschen) Meteorolog. Zeitschr. Berlin 1884. Bd. 1 pag. 421.
31. H. Pringle in der Nature. VII. 143. London. Auch Fortschr. d. Physik für 1872. pag. 802.
32. H. J. Klein: Das Gewitter. Graz 1871. pag. 4.
33. L. F. Kämtz: Vorlesungen über Meteorologie 1840. pag. 428 ff., über Luftelektricität pag. 395.
34. W. Spring: Sur l. siège des orages et leur origine, in den Bulletins de l'acad. roy. de Belgique. 1882. (3) tome 4 pag. 6.
35. J. Hann: Anleitung z. Ausführ. met. Beob. an Stationen II. u. III. Ordnung. Herausgegeb. v. d. Direction d. K. K. Centralanst. f. Met. Wien 1884. pag. 65. Ferner: Ein Beitrag zur Morphologie der Gewitterwolken in der Zeitschr. d. Oesterr. Ges. f. Met. 1880. pag. 434.
36. Faraday Experim. Researches. series 18. in den Philosoph. Transact. 1843. Auch in Poggendorffs Annalen 60 pag. 321 ff. An letzterem Orte sehe man besonders § 2090—2094 pag. 327—329, § 2120 u. 2129, pag. 338 u. 342, § 2130 u. 2131 pag. 342—343.
37. F. Kohlrausch: Die elektr. Leitungsfähigkeit des im Vakuum destillirten Wassers. Sitzungsber. d. K. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1884. 23. Oktobr. Auch in Poggendorffs Annalen 159 pag. 270. 1876.
38. Coulier im Journ. d. Pharm. et de Chém. (4) XXII. 1875. pag. 165 u. 254 auch im Naturforscher. Berlin 1875, pag. 400.
39. Aitken in Nature Vol. 23. Dec. 1880. London.
40. Ayrton u. Perry in den Proceed. Phys. Soc. London. May 1877. pag. 178.
41. F. Vettin in der (Deutschen) Meteorolog. Zeitschr. Berlin 1884. Bd. 1.
42. J. Ludewig. Gewitterbeobachtungen im Reichs-Telegraphengebiete. Elektrotechnische Zeitschr. März 1884. pag. 115.

43. A. Lancaster. Discussion des observations d'orages faites en Belgique pendant l'année 1878. Annal. de l'observat. de Bruxelles. Anhang.
44. Fr. Mohr: Ueber die Entstehung des Hagels, in Poggendorffs Annal. 117. p. 105 u. ff. 1862.
45. Elster und Geitel in Wiedemanns Annalen 1883. Bd. 19 pag. 608, Anmerkung.
46. Ad. Quetelet: S. l. climat d. l. Belgique. 3ième partie: de l'électricité, de l'air. Bruxelles 1849.
46a. Notices extraites de l'annuaire de l'observat. Royal de Bruxelles pour 1873. Brüssel 1872.
47. Birt: Report on the discussion of the electr. observations at Kew. 1849. Athenäum 1142. p. 934.
48. Denza: Leggi delle variazioni dell' elettricità atm. Meteorologia Italiana. 1879. Fasc. V. Roma 1879.
49. L. Palmieri: Die atmosph. Elektricität. Deutsch von Discher. Wien. 1884.
50. Mascart im Journal de phys. 8. pag. 329. 1879; ferner im Rapport s. les travaux du 2. Congrès internat. des Météorologistes à Rome 1879. pag. 111; ferner Comptes rendus 91 pag. 160.
51. W. Thomson: On atm. electricity, im Reprint of papers.
52. H. Dufour im Arch. d. sc. phys. et natur. Sér. 3 pag. 310. 1883.
53. Lephay in den Compt. rend. 98 pag. 483. 1884.
54. Everett in: Reports to the Perman. Committee of the first internat. Meteorolog. Congress etc. London 1878; ferner Account of observations in Nova Scotia, in den Proceed. Roy. Soc. 12 pag. 683. 1863; und Proceed. Roy. Soc. 14 pag. 10. 1865; ferner in Phil. Transact. Dec. 1867.
55. Neumayer in d. Zeitschr. d. Oest. Ges. f. Metereolog. 1870. pag. 97 ff.
55a. Hann, Hochstetter u. Pokorny: Allgem. Erdkunde, pag. 89.
56. Biot in Gilberts Annalen Bd. 20, pag. 15. 1805.
57. Tissandier in Comptes rendus 76. pag. 417.
58. Dellmanns Untersuch. üb. Luftelektricität in der Zeitschr. d. Oesterr. Ges. f. Met. 1869. Bd. 4 pag. 145, 176, 513, 561; ferner in Poggend. Annal. 89 pag. 258 u. anderwärts.
59. Dellmann in den Fortschritten d. Physik für 1863. pag. 550.
59a. Dellmann als Berichterstatter in den Fortschritten d. Physik. für 1864. Bd. 20 pag. 611 u. 612.
60. Lucien J. Blake in Wiedemanns Annal. 19 p. 518. 1883.
61. Rob. Nahrwold in Wiedemanns Annal. 5 p. 460. 1878.
62. Warburg in Poggend. Annal. 145. p. 578. 1872.
62a. Le Goarant de Tromelin in den Comptes rendus 98 p. 248. 1884.
63. G. Tissandier: Résumé des observations faites dans le cours de vingt-deux ascensions aërostatiques, im Atlas météorolog. de L'Observatoire de Paris. Tome 8. 1876. pag. J, 5 u. 6.

G. Pätz'sche Buchdruckerei (Otto Hauthal) in Naumburg a/S.


Stanford University Libraries
3 6105 010 426 513


BUCHBINDEREI
VON
GEBRÜDER HUG
ZÜRICH

